2.5 FUNCIONES CON RADICALES

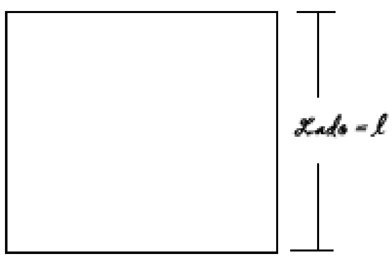
2.5.1 SITUACIONES QUE DAN LUGAR A FUNCIONES CON RADICALES

Aprendizajes:

- *Explora en una situación o problema que da lugar a una función con radicales, las relaciones y comportamientos que le permitan obtener información para establecer su representación algebraica.*
- *Establece la regla de correspondencia de una función con radicales, asociada a un problema.*

Observación: Los siguientes ejemplos se sugieren para que el profesor elija algunos para exponerlos en su clase en forma más detallada, y las actividades están dirigidas para que las resuelvan los alumnos reflexionando e interactuando con éstas.

Ejemplo 1) Se tiene un cuadrado cuya área es conocida, establecer una función para encontrar su perímetro en términos de su área.



Solución: El área del cuadrado esta dado por la fórmula: $A = \ell^2$. . . . . (1)

Es decir $\pm\sqrt{A} = \ell$ . . . . (2)

De las condiciones del problema, solo se considera la raíz positiva, ya que las longitudes son positivas.

El perímetro del cuadrado esta dado por la fórmula:

$P = 4\ell$. . . . . (3)

Sustituyendo (2) en (3) tenemos.

$P(A) = 4\sqrt{A}$ . . . .(4)

La relación (4) establece una función para obtener el perímetro del cuadrado en términos del área del cuadrado.

El área del cuadrado puede tomar los valores que se muestran en la siguiente tabla.

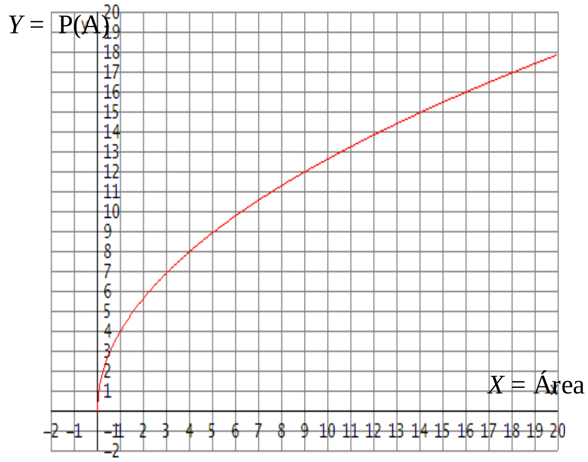
Área	0.1	0.3	0.5	0.8	1	1.5	2.4
P(A)	1.26	2.19	2.84	3.57	4	4.89	6.19

Otros valores que puede tomar el área son:

Área	5	10	50	80	100	150	200
P(A)	8.94	12.64	28.28	35.77	40	48.98	56.56

Se puede cuestionar a los alumnos sobre la existencia o no del área negativa.

Varios de los puntos obtenidos se muestran en la siguiente gráfica para tener un bosquejo de la función $P(A) = 4\sqrt{A}$.



Teniendo la función P(A) = $4\sqrt{A}$, se puede establecer su dominio, su rango y otras propiedades de la función.

Dominio: Si el valor del área puede tomar el valor de cero, el dominio son todos los números reales mayores o iguales que cero, que se puede escribir como se muestra.

$$D_f = \{x \mid x \geq 0\}$$

Rango: Si es posible que el área sea cero, el rango de la función es el conjunto.

$$R_P = \{y \mid y \geq 0\}$$

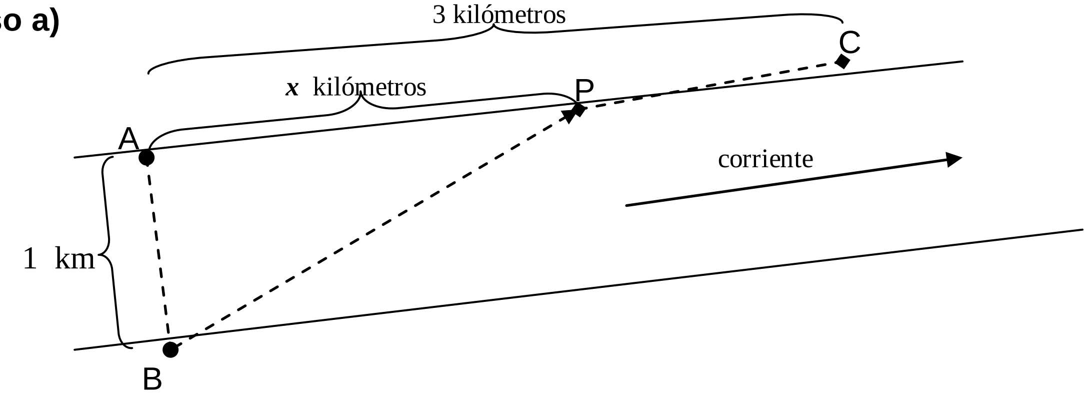
Raíces: la función tiene una raíz en $x = 0$.

Ejemplo 2) Los puntos A y B se encuentran en lados opuestos de un río que tiene 1 kilómetro de ancho. El punto C está 3 kilómetros rio abajo del mismo lado que A. Una persona nada desde B hasta algún punto P entre A y C, y después en la orilla del rio, corre desde P hasta C.

a) Expresar la distancia total d, como función de la distancia recorrida.
b) Si la persona puede nadar a 1.5 kilómetros por hora, y correr a 7 kilómetros por hora, expresar también el tiempo total T, como función de la distancia recorrida x.

Solución:

Inciso a)



La longitud del segmento BP está dada por la expresión: $\sqrt{1+x^2}$

Y la longitud del segmento PC esta dada por la expresión: $3 - x$

Así que la distancia que total d que recorre la persona es. $d(x) = \sqrt{1+x^2} + (3 - x)$

Recordar que cuando á la raíz cuadrada no se le antepone el signo negativo, se considerará que el signo es positivo.

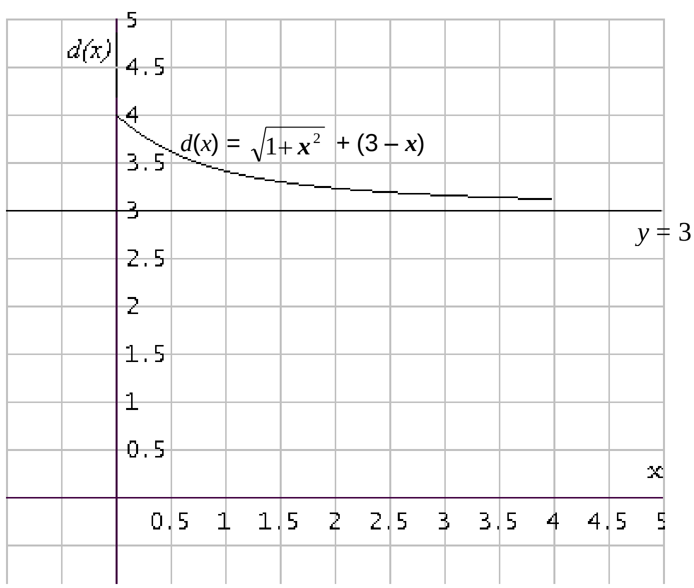
Dominio de la función: x puede tomar cualquier valor desde 0 hasta llegar a 3.

$$D_d = \{x \mid 0 \le x \le 3\}$$

Rango de la función: Para esto nos ayudaremos con los valores de $d(x)$ que se muestran en la siguiente tabla.

x	0	1	1.5	2	2.5	2.8	3
$d(x)$	4	3.41	3.30	3.23	3.19	3.17	3.16

Observa que los valores de la función van disminuyendo conforme la x aumenta su valor, puedes comprobar esto tomando otros valores de x que estén en medio de los señalados en la tabla. Así el rango de la función es el conjunto, $R_d = \{y \mid 3.16 \le y \le 3.90\}$.
La función tiene una *asíntota horizontal* cuya ecuación es $y = 3$.
La gráfica de la función se muestra a continuación.



Solución b. Como puede nadar a 1.5 kilómetros por hora, el tiempo T_{BP} que le lleva cruzar el río es: $T_{BP}(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1.5}$

Y dado que corre a 7 kilómetros por hora por la orilla, el tiempo T_{PC} que emplea para llegar al punto C es: $T_{PC}(x) = \dfrac{3-x}{7}$

El tiempo que le lleva para ir del punto B al punto C es: $T(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1.5} + \dfrac{3-x}{7}$

El dominio de la función, es el mismo que en el caso **a)**: $D_t = \{ x \mid 0 \le x \le 3\}$

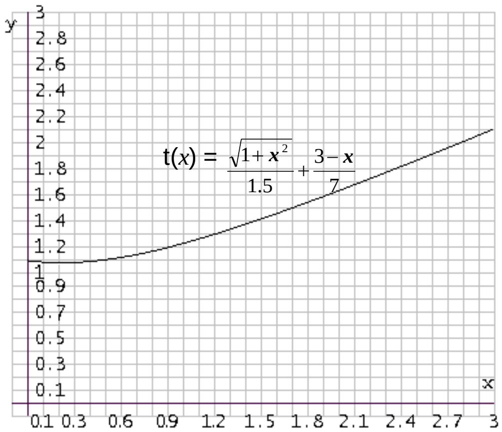
Para encontrar el rango de la función veamos la siguiente tabla de valores para ver el comportamiento de la función, procura comprobar los valores de la función.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1	1.5	2	2.8	3
t(x)	1.095	1.084	1.079	1.081	0.102	1.228	1.416	1.633	2.010	2.108

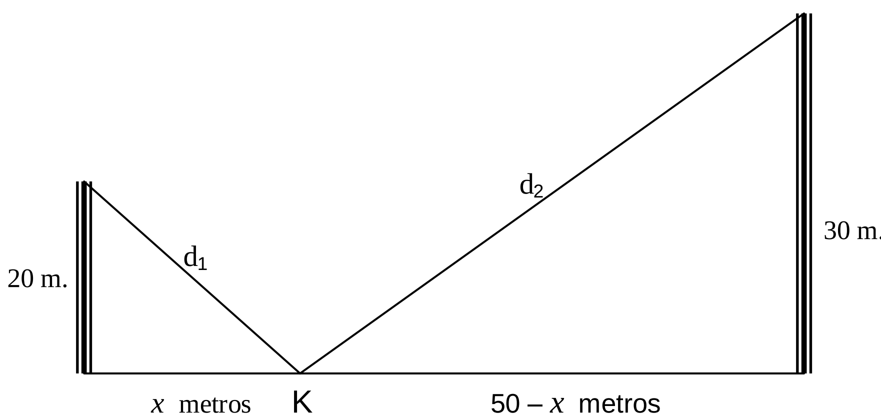
Observar que los valores de la función disminuyen hasta llegar al valor de 1.079 y luego aumentan hasta llegar al valor de 2.108, así que el rango aproximado de la función es: $R_t = \{ y \mid 1.079 \le y \le 2.108\}$

Utiliza la calculadora y encuentra el menor valor del tiempo en que el hombre realiza su recorrido.

La gráfica de la función es la siguiente.



Ejemplo 3: Dos postes de 20 y 30 metros de altura, serán clavados en la tierra, con cables que van de la parte superior de cada uno de ellos hasta un punto K, que está entre los dos postes, los postes están separados 50 metros, expresa la cantidad total de cable empleada (d) como función de x (la distancia del punto K al poste de 20 metros).



Solución.

La cantidad de cable d_1 esta dada por la fórmula: $d_1 = \sqrt{20^2 + x^2}$

La cantidad de cable d_2 esta dada por la fórmula: $d_2 = \sqrt{30^2 + (50-x)^2}$

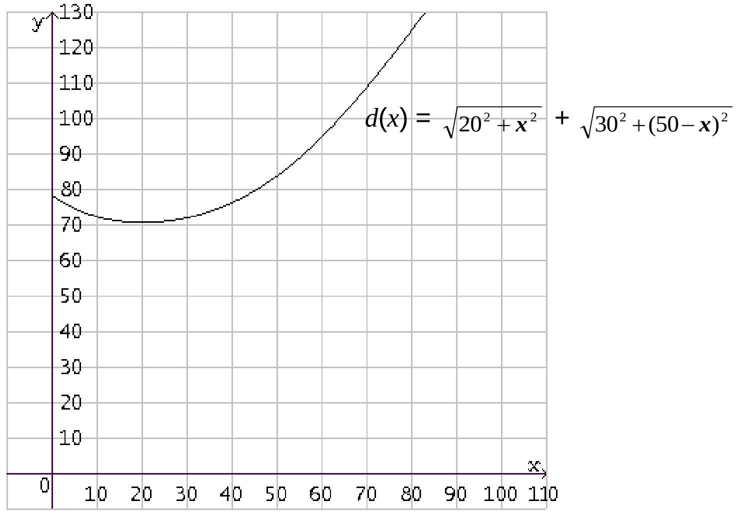
La cantidad total de cable d utilizada para fijar los postes es.

$$d(x) = \sqrt{20^2 + \boldsymbol{x}^2} + \sqrt{30^2 + (50 - \boldsymbol{x})^2}$$

Dominio de la función: los valores de x que son mayores que 0 y menores que 50.

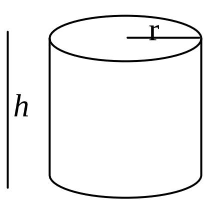
$$D_d = \{x \,/\, 0 < x < 50\}$$

La función de este problema esta formada por dos raíces, así que para calcular los valores del rango de manera aproximada es necesario usar una hoja de cálculo.
La gráfica de la función se recomienda hacerla en un programa como puede ser Geogebra y se muestra a continuación.



Se proponen las siguientes actividades como ejercicios para los alumnos.

Actividad 1) El volumen de un cilindro circular recto, de altura h y radio r, es 5 cm^3. Despeja a r en términos de h y expresa el área lateral del cilindro en función de h.



Solución:

- El volumen de un cilindro esta dado por V = ________
- Como tiene de volumen 5 cm^3, sustituimos este valor y tenemos ________________
- Despejamos a r de esta expresión, r = __________ __________________

- El área lateral de un cilindro está dada por, A_{Lateral} = ______________
- Sustituyendo el valor de r se tiene que A_{Lateral} = _________________
- Todo lo que esta fuera del radical entra en el radical elevándolo al cuadrado

- El área lateral del cilindro de volumen 5 cm^3 es: $A_{\text{Lateral}} = \sqrt{20\pi h}$

En notación funcional, $A_L(x) = \sqrt{20\pi h}$

Actividad 2) Dos calles se interceptan como se muestra en la figura. A las 12:00 p. m. el auto A atraviesa el cruce recto y se dirige hacia el sur con una velocidad constante de

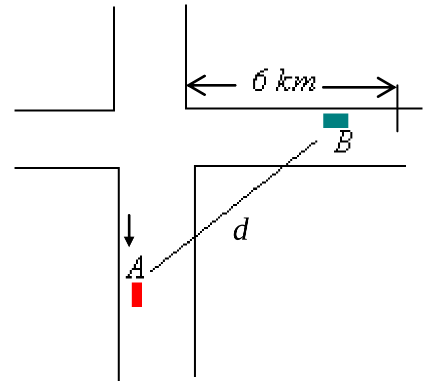
75 km/h. Al mismo tiempo, el auto B está a 6 km del cruce y viaja hacia el occidente con una velocidad constante de 45 km/h; siendo t=0 la representación de las 12:00 p.m., expresa la distancia *d* entre los dos autos como una función del tiempo ($t \geq 0$).

Solución.-

a) La distancia entre los dos autos en t = 0 es: ______________

b) Conforme transcurre el tiempo el auto A se ___________ del cruce y como lleva una velocidad constante de_________ recorre una distancia de ____________________;

c) El auto B se ___________ al cruce con una velocidad constante de __________ por lo que recorre una distancia de ____________________.



d) Para calcular d utilizamos el _______________________, donde el cateto vertical es la distancia que recorre el auto A y es ____________, el cateto horizontal es la distancia que le falta recorrer al auto B para llegar al cruce y es ____________________.

e) Así que la distancia entre los dos autos es: ________________________.

f) Cuando el auto B llega al cruce a que distancia se encuentra el auto A: __________________

g) Cuando el auto B atraviesa el cruce nuevamente se forma un triángulo rectángulo donde el cateto vertical es la distancia recorrida por el auto A y el cateto horizontal es la distancia recorrida por el auto B que sigue siendo ________________.

h) La distancia entre los dos autos es: $d = \sqrt{(75t)^2 + (6-45t)^2}$

En notación funcional: $d(t) = \sqrt{(75t)^2 + (6-45t)^2}$

Ejercicios 2.5.1

1) La caída de un cuerpo desde una altura h_0 esta dada por la fórmula.

$h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$, donde h_0 es la altura de la cual se suelta el cuerpo, $g = 9.8\frac{m}{s^2}$, y t es el tiempo transcurrido.

a) Expresa el tiempo transcurrido en función de la distancia recorrida por el cuerpo. _________________________

b) Indica el dominio de la función: _________________________

c) Indica el rango de la función: ___________________________

d) Dibuja la gráfica de la función si $h_0 = 5$ m

2) La velocidad v del sonido en el aire varía con la temperatura. Se puede calcular en pies por segundo (ft/s) con la ecuación.

$v(T)=1087\sqrt{\frac{T+273}{273}}$, donde T es la temperatura (en °C)

a) De acuerdo con la fórmula la función v(T) tiene un cero para T = _______
b) Si la máxima temperatura que se ha registrado es de 54°C en el desierto y la mínima de –4°C, el dominio de la función es: ________________________

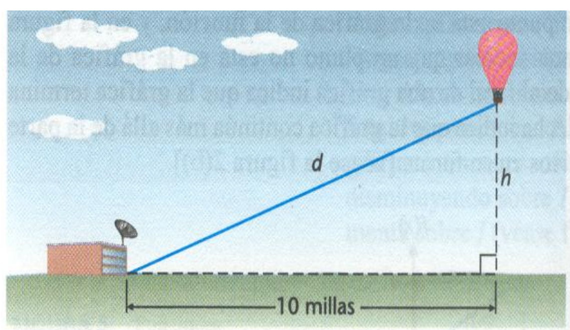
c) De acuerdo a los valores en el dominio, el rango de la función es: ____________
d) Realiza la gráfica de la función.

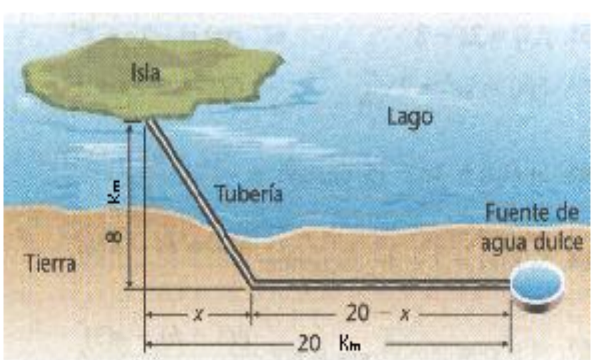
3) El área de un triángulo equilátero si sus lados miden s unidades, esta dada por la fórmula $A(S)=\frac{\sqrt{3}s^2}{4}$.

a) Si el área puede variar de 1 hasta 10 centímetros cuadrados, el rango de la función es: ________________________________
b) La longitud s en función del área es: ____________________________

c) Dibuja la gráfica de la función.

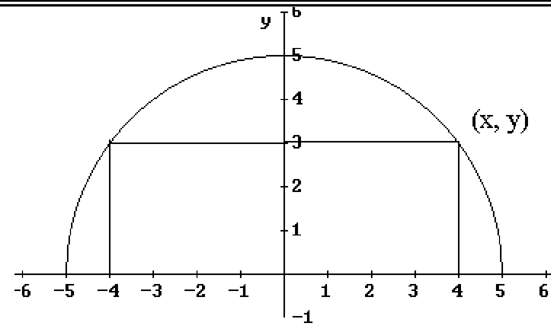
4) Se suelta un globo de observación en un punto a 10 millas de la estación que recibe su señal y se eleva verticalmente como se indica en la figura. Expresa la distancia $d(h)$ entre el globo y la estación de recepción como una función de la altura h del globo.

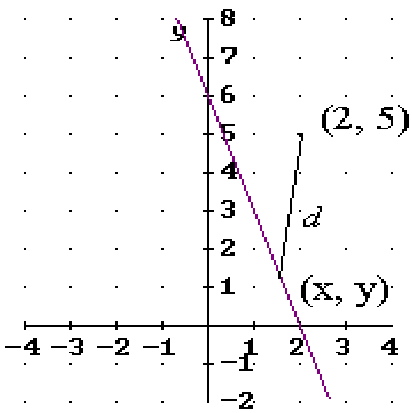




5) Una tubería de agua dulce va desde una fuente en la orilla de un lago a una pequeña comunidad de descanso en una isla a 8 km de la costa, como se indica en la figura. El costo de colocar la tubería en la tierra es de $10 000 por km y el de colocarla en el lago de $15 000 por km. Expresa el costo total $C(x)$ para la construcción de la tubería como una función de x. A partir de consideraciones prácticas, ¿cuál es el dominio de la función C?

6) Un rectángulo está limitado por el eje x y el semicírculo $y=\sqrt{25-x^2}$. Escribe el área del rectángulo como una función de x, y determina el dominio de la función.





7) Expresa la distancia, d, del punto (2, 5) al punto (x, y) de la recta $3x + y = 6$, en función de x.

2.6 ESTUDIO ANALÍTICO Y GRÁFICO DEL DOMINIO Y EL RANGO DE UNA FUNCIÓN DEL TIPO: $f(x) = \sqrt{ax+b}$ y $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$

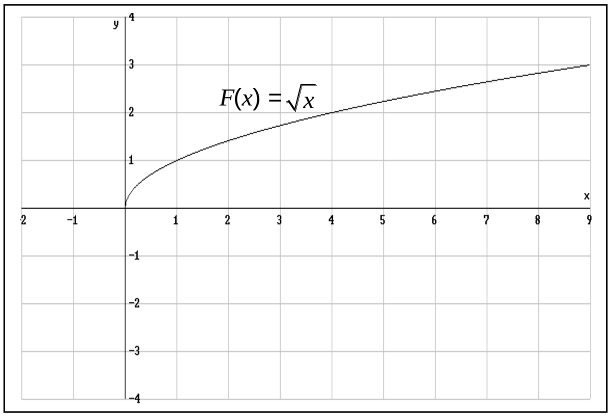
Aprendizajes:

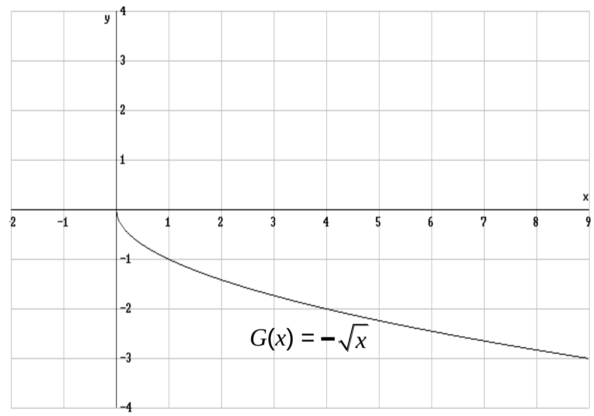
- *A partir de la regla de correspondencia de una función con radicales, elabora una tabla de valores que le permita construir su gráfica.*
- *Identifica el dominio y rango de una función con radicales, a partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema.*
- *Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica, de una función con radicales, y obtendrá conclusiones sobre el problema correspondiente.*

2.6.1 Funciones del tipo $f(x) = \sqrt{ax+b}$

En matemáticas 3 se vio lo que representa en el plano la ecuación $y^2 = x$, que es una parábola horizontal, ahora se analizará desde el punto de vista de una función. Al despejar a y se tiene $y = \pm\sqrt{x}$, la cuál para cada valor de x hay dos valores de y, uno positivo y el otro negativo, así que para que cumpla con la definición de función la tenemos que separar en dos partes, por un lado la parte positiva y por otro la parte negativa. Por lo que se tiene dos funciones con radicales, una $F(x) = \sqrt{x}$ y otra $G(x) = -\sqrt{x}$.

Enfatizar que dentro de la raíz cuadrada no se puede tener números negativos, ya que para estos, la raíz cuadrada no es un número real. Entonces el **dominio** de las dos funciones anteriores son los números mayores o iguales que 0, es decir, **x ≥ 0**. Lo que cambia es su **rango**, ya que para $F(x) = \sqrt{x}$ son todos los valores de $\boldsymbol{y \geq 0}$ y para $G(x) = -\sqrt{x}$, son los valores de $\boldsymbol{y \leq 0}$. Si se hace una tabulación las gráficas que resultan son las siguientes, hay que hacer ver que **no hay asíntotas**.





A continuación se analizaran algunos ejemplos que pueden utilizarse en la clase y otros pueden dejarse de tarea para que los alumnos interactúen con estos.

PARA COMPLEMENTAR SOBRE EL DOMINIO DE ESTAS FUNCIONES SE PUEDEN RECOMENDAR LOS SIGUIENTES VIDEOS:
http://www.youtube.com/watch?v=EWD0Jvii_hI&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=tdKCA-SuJO8&feature=related

Ejemplo 1) Encontrar el dominio, el rango, los ceros y graficar la función:

$$f(x) = \sqrt{x - 5}$$

Solución.

Dominio de la función, Considerando que dentro de la raíz cuadrada no se puede tener números negativos, el dominio de la función esta formado por los valores de x tales que $x - 5 \geq 0$, de donde $x \geq 5$, así el dominio es el conjunto: $D_f = \{x \mid x \geq 5\}$

Ceros de la función, la función tiene un cero o raíz de la ecuación en $x = 5$.

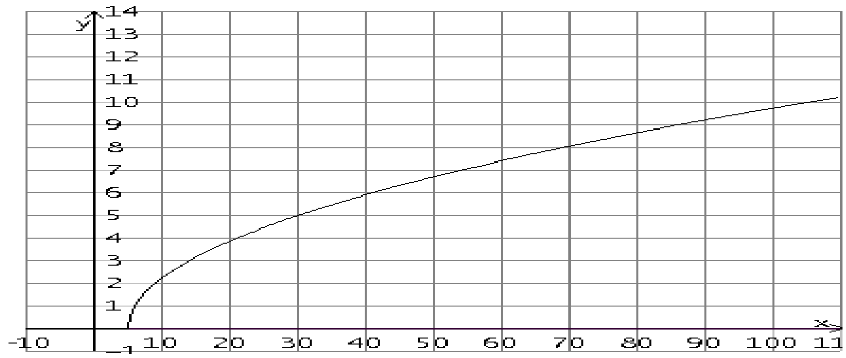
Rango y gráfica de la función, para determinar el rango de la función nos ayuda la siguiente tabulación.

x	5	6	9	14	21	30	41	69	105	10005
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6	8	10	100

Observa que los valores de $f(x)$ empiezan en cero y crecen conforme los valores de x crecen también, así, el rango de la función esta formado por los valores de $f(x) = y$ que son mayores o iguales a 0. $R_f = \{y \mid y \geq 0\}$

Nota para el profesor: Se puede hacer la observación que la función no tiene asíntotas, y en general las funciones radicales donde el radicando es una función lineal no las tienen y siempre sus gráficas son mitades de parábolas horizontales.

La gráfica es la siguiente.



Ejemplo 2) Encontrar el dominio, el rango, los ceros y graficar la función:

$$g(x) = \sqrt{4 - x}$$

Solución.

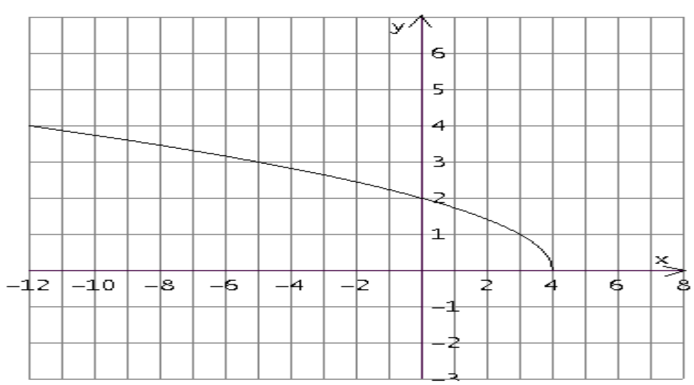
Dominio de la función, Esta formado por los valores de x tales que $4 - x \geq 0$, es decir cuando $x \leq 4$, así el dominio es el conjunto: $D_g = \{x \mid x \leq 4\}$

Ceros de la función, la función tiene un cero en $x = 4$.

Rango y gráfica de la función: para determinar el rango de la función nos ayuda una tabulación como la siguiente:

x	4	3	0	-5	-12	-21	-32	-60	-96	-9996
$g(x)$	0	1	2	3	4	5	6	8	10	100

El rango de la función esta formado por los valores de $g(x) = y$ que son mayores o iguales a 0. $R_g = \{y \mid y \geq 0\}$ y su gráfica es la siguiente:



Ejemplo 3) Encontrar el dominio, el rango, los ceros y graficar la función:

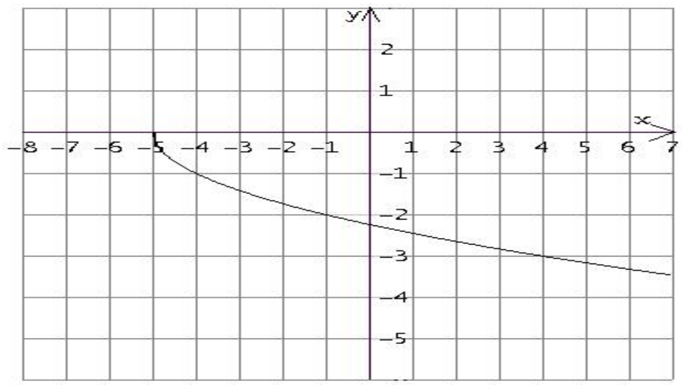
$$h(x) = -\sqrt{x+5}$$

Solución.

Dominio de la función, Esta formado por los valores de x tales que $x + 5 \geq 0$, es decir cuando $x \geq -5$, así el dominio es el conjunto: $D_h = \{x \mid x \geq -5\}$

Ceros de la función, la función tiene un cero en $x = 4$.

Rango y gráfica de la función: para determinar el rango de la función nos ayuda una tabulación para localizar sus puntos en un plano y trazar su gráfica:



El rango de la función esta formado por los valores de $h(x) = y$ que son menores o iguales a 0. $R_h = \{y \mid y \leq 0\}$

Ejemplo 4) Encontrar el dominio, el rango, los ceros y graficar la función:

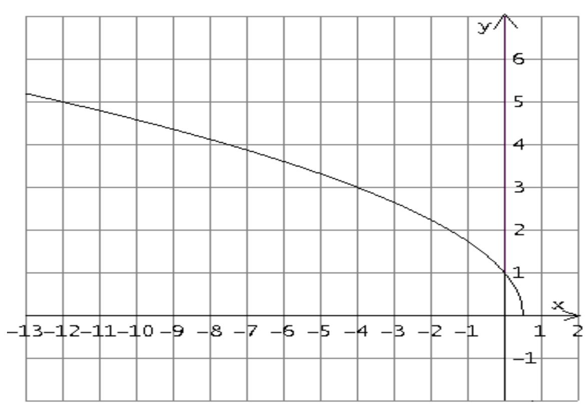
$$k(x) = \sqrt{-2x+1}$$

Solución.

Dominio de la función, Esta formado por los valores de x tales que $-2x + 1 \geq 0$, es decir cuando $x \leq ½$, así el dominio es: $D_k = \{x \mid x \leq ½\}$

Ceros de la función, la función tiene un cero en $x = ½$.

Rango y gráfica de la función: para determinar el rango de la función nos ayuda una tabulación para localizar sus puntos en un plano y trazar su gráfica:



El rango de la función esta formado por los valores de $k(x) = y$ que son mayores o iguales a 0. $R_h = \{y \mid y \geq 0\}$

Nota para el profesor: hay que hacer notar que al colocar el signo negativo fuera del radical la gráfica que resulta es la parte inferior de la parábola horizontal que abre a la derecha, pero si el signo negativo lo tiene el coeficiente de x, entonces la gráfica se invierte sobre el eje Y, ahora tenemos la mitad de una parábola que abre hacia la izquierda, también hay que analizar los recorridos sobre los ejes.

Ejercicios 2.6.1

Encontrar el dominio, el rango, los ceros y graficar las siguientes funciones:

1) $f(x) = \sqrt{\boldsymbol{x} - 4}$ 2) $f(x) = \sqrt{\boldsymbol{x} - 10}$ 3) $f(x) = \sqrt{10 - \boldsymbol{x}}$ 4) $f(x) = \sqrt{4 - \boldsymbol{x}}$

5) $f(x) = -\sqrt{x+3}$ 6) $f(x) = -\sqrt{5x-7}$ 7) $f(x) = \sqrt{4-2x}$ 8) $f(x) = 4 + \sqrt{\boldsymbol{x} - 2}$

9) $f(x) = \sqrt{2x+7} - 3$ 10) $f(x) = -2 - \sqrt{6 - \boldsymbol{x}}$ 11) $f(x) = -\sqrt{\boldsymbol{x} - 15}$ 12) $f(x) = \sqrt{15 - \boldsymbol{x}}$

PARA COMPLEMENTAR EL TEMA SE PUEDE CONSULTAR LA SIGUIENTE PÁGINA EN DONDE PRIMERO SE ANALIZA EL RADICANDO DE LA FUNCIÓN:
http://oceanologia.ens.uabc.mx/~chelo/precalculo/Descartes/Analisis/13-0-1-dominios_definicion_funciones/radicales.htm

2.6.2 Funciones del tipo $f(x) = \sqrt{\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}}$

Ejemplo 5) Encontrar el dominio, el rango, los ceros y trazar la gráfica de la función,

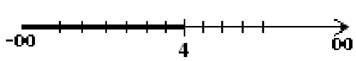
$$f(x) = \sqrt{16 - \boldsymbol{x}^2}$$

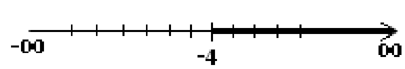
Solución:

El dominio de la función, son todos los números reales donde $16 - x^2 \geq 0$, Si recordamos que, $16 - x^2 = (4 - x)(4 + x) \geq 0$. Para que la desigualdad se cumpla se deben de cumplir de manera simultanea las dos desigualdades.

$$(4 - x) \geq 0 \quad \text{y} \quad (4 + x) \geq 0$$

De esto, $4 \geq x$ y $x \geq -4$. En notación de conjuntos es $\{x \mid x \leq 4\}$ y $\{x \mid x \geq -4\}$ respectivamente. En notación de intervalo

$x \in (-\infty , 4]$ 

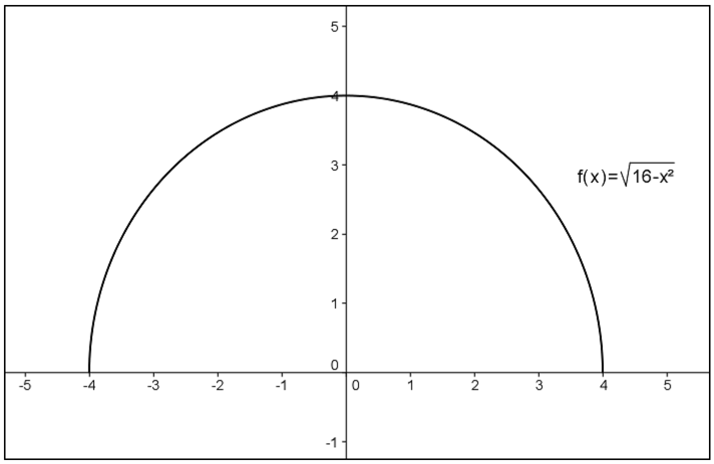
y $\in [-4 , \infty)$ 

El dominio de la función es el conjunto de números reales donde se cumplen las dos desigualdades, y es el conjunto $\{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$ que se denota por $[-4 , 4]$ y se llama intervalo cerrado, porque incluye los extremos del intervalo.

La siguiente tabla nos muestra algunos valores de la función para valores de x en su dominio.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	1.5	2	3	4
$f(x)$	0	2.64	3.46	3.87	4	3.87	3.70	3.46	2.64	0

Raíces: La función tiene dos raíces, la primera en $x_1 = -4$, y la segunda en $x_2 = 4$.
Rango de la función: La función $f(x)$ toma valores desde 0 hasta 4, luego el rango es el conjunto, $R_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\} = [0, 4]$
Gráfica de la función: se muestra a continuación.



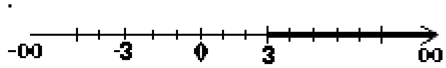
Ejemplo 6) Encontrar el dominio, el rango, las raíces y la gráfica de la función:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

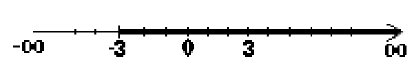
Solución:
Raíces: La función tiene raíces en los puntos que cumplen con $x^2 - 9 = 0$, comprueba que son dos raíces en $x_1 = -3$, y la segunda en $x_2 = 3$.
Dominio de la función: el dominio de la función esta dado por todos los números reales para los cuales $x^2 - 9 \geq 0$, usando la equivalencia:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \geq 0$$

Para que se cumpla la desigualdad ambos paréntesis deben de ser positivos o ambos negativos.
Caso 1) Consideremos que ambos paréntesis son positivos o cero, es decir, $x - 3 \geq 0$ y $x + 3 \geq 0$, de esto se deduce que $x \geq 3$ y $x \geq -3$. Gráficamente esto se representa por:



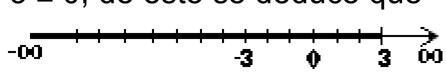
y



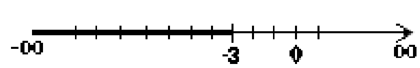
$x \geq 3$ $x \geq -3$

Ambas desigualdades se cumplan en el intervalo **[3 , ∞]**.

Caso 2) Consideremos que ambos son negativos o cero, es decir $x - 3 \leq 0$ y $x + 3 \leq 0$, de esto se deduce que $x \leq 3$ y $x \leq -3$. Gráficamente esto se representa por:



y



$x \leq 3$ $x \leq -3$

Ambas desigualdades se cumplan en el intervalo **[–∞ , –3].**
Considerando ambos casos, el dominio de la función D_f = [–∞ , –3] **U** [3 , ∞].

NOTA: Recordar las direcciones de los videos de intervalos

Rango de la función: Nos ayudaremos con algunas tabulaciones como en las tablas siguientes.

x	-3	-4	-5	-10	-20	-30	-50	-100	-200	-500
$g(x)$	0	2.64	4	9.53	19.77	29.84	49.90	99.95	199.97	499.99

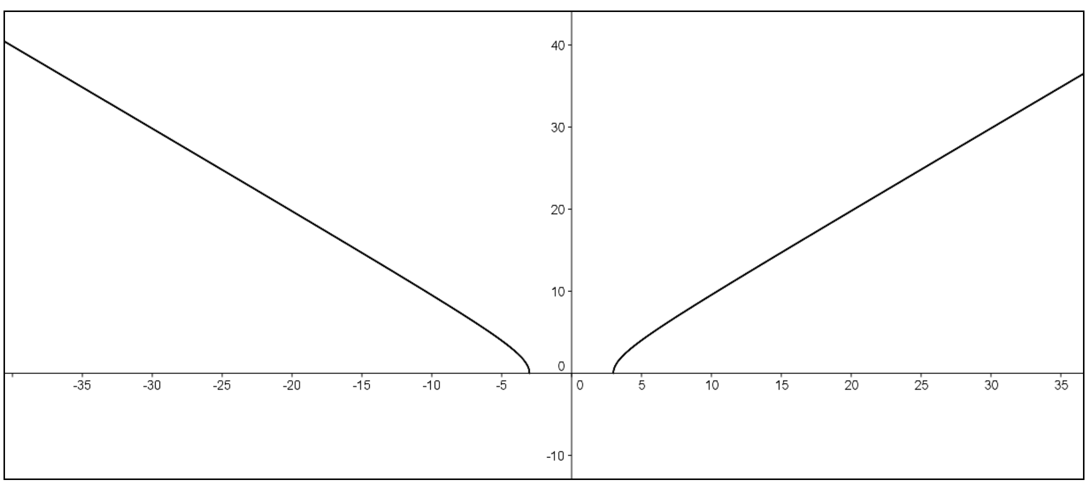
Observar que si x se aleja de cero por la izquierda desde – 3, los valores de la función $g(x)$ crecen y son positivos.
Si se hace otra tabulación ahora con valores de x positivos a partir de 3:

x	3	4	5	10	20	30	50	100	200	500
$g(x)$	0	2.64	4	9.53	19.77	29.84	49.90	99.95	199.97	499.99

Observar que los valores de la función $g(x)$ también crecen y son positivos.
El rango de la función es el conjunto de números positivos que son mayores o iguales que cero.

$R_g = \{ x \mid x \geq 0\}$

Y la gráfica de la función es la siguiente.



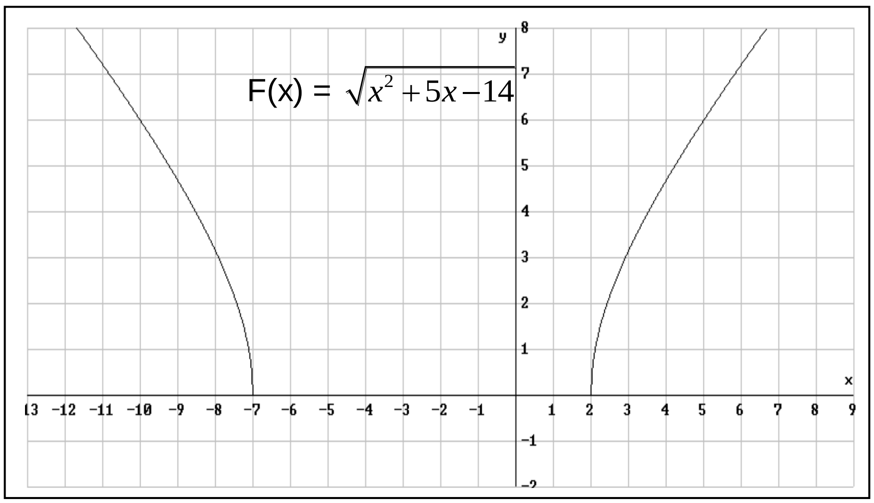
Ejemplo 7) Encuentra el dominio, el rango y los ceros de la función,

F(x) = $\sqrt{x^2+5x-14}$ y traza su gráfica.

Solución: Otra forma de analizar la solución a este tipo de problemas es la siguiente:
Dentro del radical tenemos una función cuadrática, y como ya se sabe, esta representa una parábola que abre hacia arriba. Además de que dentro del radical no se puede

tener números negativos, se buscan los valores de x que cumplan esta afirmación. Para esto se encuentran las raíces de la ecuación: $x^2 + 5x - 14 = 0$ o
$(x + 7)(x - 2)= 0$ las raíces son $x = -7$ y $x = 2$, que son también los ceros de F(x).
La parábola cruza el eje x en -7 y 2, por lo tanto, si abre hacia arriba los valores de x que harán que la raíz cuadrada esté definida en los reales, son para cuando las ramas de la parábola estén arriba del eje X. Esto sucede cuando los valores x cumplen que $x \le -7$ junto con las $x \ge 2$, esto lo podemos escribir como la unión de dos intervalos $(-\infty, -7] \cup [2, \infty)$ que nos determinan **el dominio**.

Rango de la función: Como el signo del radical no es negativo, lo tomamos como positivo. Se evalúa a F en algunos valores de x en las dos regiones, y se localizan los puntos y al unirlos se obtiene la siguiente gráfica:



Hay otros casos que se tienen que analizar, por ejemplo si x^2 tiene signo negativo ¿como será la gráfica y como queda el dominio?, también podría suceder que no representara nada en el plano. Ahora si se le cambia el signo al radical, simplemente la gráfica se invierte sobre el eje X, algunos de estos casos se seguirán analizando en las siguientes actividades.

NOTA PARA EL PROFESOR: las siguientes actividades son recomendables para que las resuelva el alumno en clase y se discutan conjuntamente para corregirlas y verificar el avance del grupo.

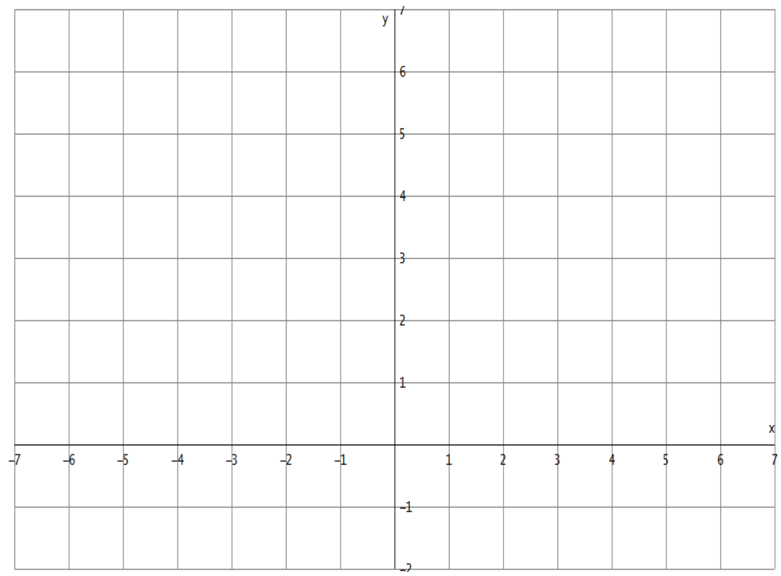
Actividad 1) Encuentra el dominio, el rango y los ceros de la función $G(x) = \sqrt{25 - x^2}$, también traza su gráfica.

Solución:
La función que se encuentra dentro del radical es una parábola que abre hacia _______________, y sube _________ unidades, intercepta al eje X en ______ y _____.

Los ceros de $G(x)$ son: ______________________

La raíz cuadrada en esta función esta definida en los reales para los valores x que van desde –5 hasta ______, por lo que el **dominio** es: _______________________

Evalúa la función G en algunos puntos desde –5 hasta 5 y localízalos sobre el siguiente plano.



Esta gráfica corresponde a la mitad de una semicircunferencia ($x^2 + y^2 = 25$) de radio 5, el **rango** es: ________________________.

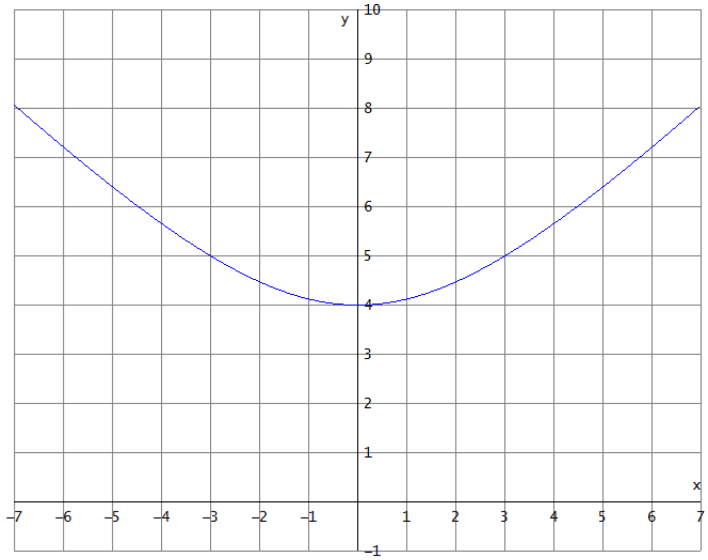
Si fuera del radical le colocamos un signo menos, la gráfica va a ser la parte de _________________ de la circunferencia con centro en el origen y radio 5.

Actividad 2) Encuentra el dominio, el rango y los ceros de la función $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ y traza su gráfica.

Solución:

La expresión dentro del radical representa una _______________ que abre hacia _______________ y sube _________ unidades. Esta por arriba del eje X, así que para cualquier valor que le demos a x siempre tenemos un valor positivo dentro de la raíz. Por lo que el **dominio** es: ______________________Evalúa en algunos puntos y márcalos sobre la gráfica.

Por lo anterior, los ceros de la función son: __________________________________



El rango es: ________________________. Intercepta al eje Y en _________, la gráfica es simétrica con respecto al eje ________, así que con sólo evaluar en x positivas tenemos el valor de la función en las correspondientes x negativas.

Actividad 3) Encuentra el dominio, el rango y los ceros de la función $g(x) = -\sqrt{-2x^2 + 4x + 30}$ y traza su gráfica.

Solución:

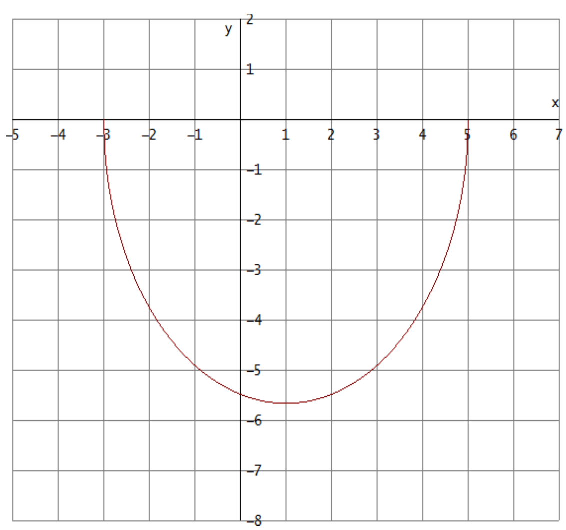
La función dentro del radical es una parábola que abre hacia __________, por lo que le podemos sacar raíz cuadrada solo a la parte que se encuentra sobre el eje X, igualando a cero para tener los puntos donde cruza al eje X tenemos:

$-2x^2 + 4x + 30 = 0$ las soluciones son x_1 = _______ y x_2 = _______

Así que podemos evaluar la función g desde ___–3___ hasta _______, por lo que el dominio es: ______________________________

Y los ceros de la función son: ______________________

Evalúa en algunos puntos dentro de este intervalo y márcalos sobre la siguiente gráfica



La gráfica ahora es la mitad de una elipse vertical y es la parte de abajo, porque fuera del radical esta un signo menos, es simétrica con respecto a la recta de ecuación: ___________, el mínimo lo podemos obtener evaluando en x = _____, o sea
$g(1)$ = ________.
El rango de la función g es: ______________________________

Intercepta al eje Y en ____________

Es necesario que anotes todas las observaciones, que van saliendo, ya que debes ser capaz de hacer un bosquejo de la gráfica, sin necesidad de tabular, porque sería muy tedioso y tardado.

Notas para el profesor: En esta parte hay que tener mucho cuidado al analizar la función del radicando ya que aunque esta es una parábola, solo nos es útil la parte positiva, así que hay que evitar tener en el radicando parábolas que abren hacia abajo y no cruzan al eje X.

- Si en el radicando se tiene una parábola que abre hacia arriba y cruza al eje X, la gráfica de la función es la mitad de una hipérbola vertical y dependiendo del signo que se encuentre fuera del radical es la parte superior o inferior.
- Si en el radicando se tiene una parábola que abre hacia arriba y no cruza al eje X (tiene raíces complejas), entonces ahora la gráfica de la función es la mitad de una hipérbola horizontal y según el signo que tenga el radical es la parte superior o inferior.
- Si en el radicando se tiene una parábola que abre hacia abajo y cruza al eje X, la gráfica resultante es la mitad de una circunferencia o de una elipse y dependiendo del signo fuera del radical es la parte superior o inferior

Ejercicios 2.6.2
Encuentra el dominio, el rango, los ceros y trazar la gráfica de las siguientes funciones:

1) $\boldsymbol{f(x)}=\sqrt{9-\boldsymbol{x}^2}$ 2) $\boldsymbol{f(x)}=\sqrt{4-\boldsymbol{x}^2}$ 3) $\boldsymbol{f(x)}=\sqrt{25-\boldsymbol{x}^2}$

4) $\boldsymbol{f(x)}=\sqrt{36-\boldsymbol{x}^2}$ 5) $\boldsymbol{f(x)}=\sqrt{-4-\boldsymbol{x}^2}$ 6) $\boldsymbol{f(x)}=\sqrt{-16+\boldsymbol{x}^2}$

7) $\boldsymbol{f(x)}=-\sqrt{25-\boldsymbol{x}^2}$ 8) $\boldsymbol{f(x)}=-\sqrt{36-\boldsymbol{x}^2}$ 9) $\boldsymbol{f(x)}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2-25}$

10) $\boldsymbol{f(x)}=-\sqrt{\boldsymbol{x}^2-16}$ 11) $\boldsymbol{f(x)}=-\sqrt{\boldsymbol{x}^2-4}$ 12) $\boldsymbol{f(x)}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2+4}$

13) F(x) = $\sqrt{2-x^2}$ 14) F(x)=$\sqrt{x^2+7x-6}$ 15)F(x) =$\sqrt{15-2x-x^2}$

16)F(x)=$-\sqrt{-x^2+8x-15}$ 17)F(x)=$-\sqrt{x^2+9x+20}$ 18)F(x)=$\sqrt{-x^2+5x-4}$

19) $F(x) = -\sqrt{x^2-4} + 4$ 20) $F(x) = -\sqrt{x^2+6x}$ 21) $F(x) = -\sqrt{9-x^2} + 5$

22) $f(x) = -\sqrt{x^2+4x+8}$ 23) $g(x) = \sqrt{x^2-6x+10} - 3$ 24) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+6x+16}$

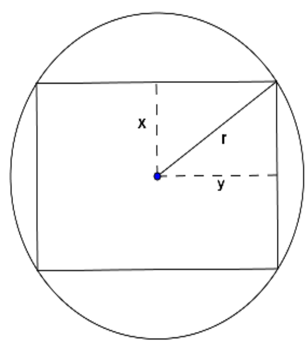
2.7 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SUSCEPTIBLES DE MODELARSE A TRAVÉS DE FUNCIONES RACIONALES O CON RADICALES.

Aprendizajes:

Resolverán problemas con fenómenos de diversa índole (geométricos y físicos), susceptibles de modelarse a través de funciones con radicales.

LOS SIGUIENTES PROBLEMAS ESTÁN DIRIGIDOS AL ALUMNO YA SEA QUE SE UTILIZEN EN LA CLASE O SE DEJEN DE TAREA.

Problema 1) En un círculo de radio r = 10 centímetros, se inscribe un rectángulo como se muestra en la siguiente figura.



a. Encuentra el perímetro del rectángulo en función de x: ___________________________

b. El dominio de la función perímetro es: _______

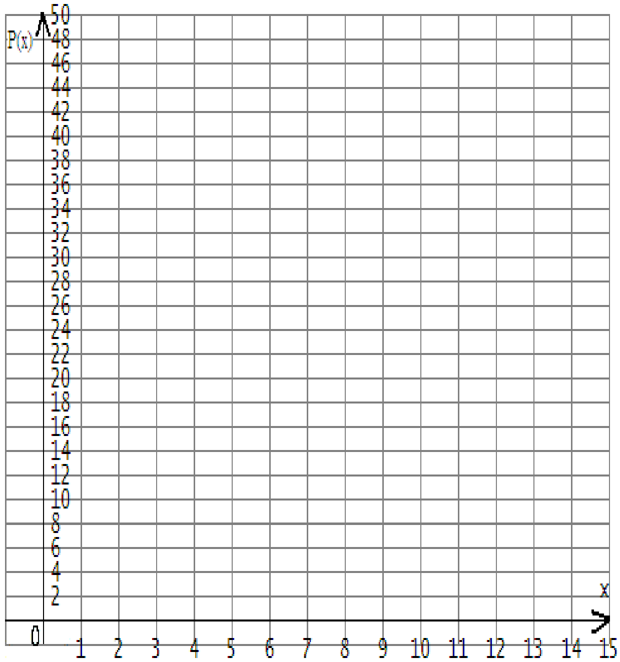
c. El rango de la función perímetro es: _________

d. Si x = 5 centímetros el valor del perímetro del rectángulo es de: ________ centímetros.

e. Verifica que los valores de x en la siguiente tabla pertenecen al dominio de la función, y luego encuentra el valor del perímetro para cada uno de ellos.

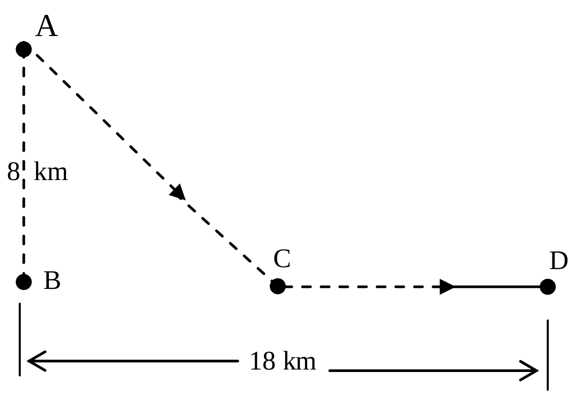
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(x)											

f. Con la información obtenida traza la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



g. Observando tu gráfica, ¿para qué valor de x el valor del perímetro es el mayor de todos? ___________________________________

Problema 2) Un pájaro se libera de una isla, llamémosle A al lugar, que está a 8 km del punto B en una costa recta. El ave vuela al punto C de la costa y después a lo largo de la misma hasta la zona de anidación D. Suponga que el animal necesita 10 kcal/km de energía para volar sobre la tierra y 14 kcal/km para hacerlo sobre el agua. Si instintivamente el pájaro escoge una trayectoria que minimice su consumo de energía, ¿a qué punto volará?



Solución:

Hay dos trayectorias una sobre el agua y otra sobre tierra

- Para la trayectoria sobre el agua usamos el __________________
- Sea x la distancia en kilómetros desde B hasta C, (márcala en la figura), así que la distancia recorrida sobre el agua es: ______________

- La distancia recorrida en tierra es ___________________

La energía consumida es igual a (la energía por km) por (los kilómetros de vuelo)

- La energía consumida sobre el agua es: ________________________

La energía consumida en tierra es : ___________________________

La energía total = ____

Así que E_{Total} =(14 kcal/km)(   ) + 10 kcal/km(   )

La energía en función de los kilómetros recorridos es

$$E(x) = 14\sqrt{x^2 + 64} + 10(18 - x)$$

Si el pájaro vuela hasta el punto B entonces x es cero y la energía es de 250 kcal. Veamos que pasa conforme crece x hasta que todo el recorrido lo hace sobre el agua (x = 18 km)

Completa la siguiente tabla.

x (km)	$E(x)$ (kcal)
0	250
1	
2	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
12	
14	
16	
18	

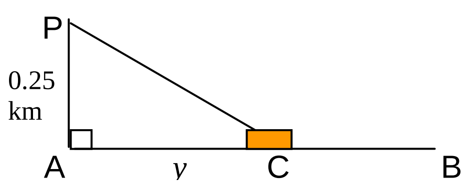
Que observaste en la tabla _____________
____

Donde consideras que sea el valor mínimo que toma E _________________

Aproxima este valor hasta centésimas

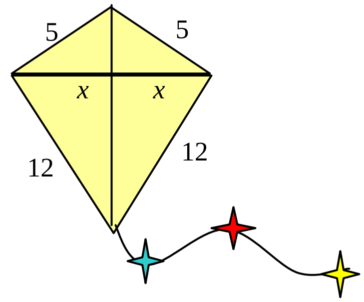
Ejercicios 2.7

1) Un automóvil viaja de A hacia B a una velocidad media de 45 km/h. Expresa la distancia, d = PC, en función de y, y a y en función del tiempo, t. (P representa una patrulla de control). Calcula d cuando t = 3 minutos, suponiendo que t = 0 en el punto A.

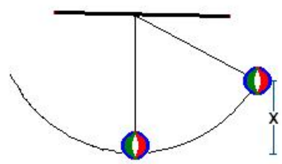


2) Un armazón de papalote debe fabricarse partiendo de 6 trozos de madera. Las 4 piezas que forman el borde del papalote se han cortado a las longitudes indicadas en la figura (pulgadas).

a) Encuentra el área del papalote como función de x
b) ¿De que longitud deben ser los travesaños para maximizar el área del papalote?

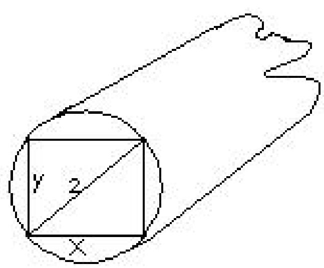


3) La velocidad (en metros por segundo) de una pelota oscilando en el extremo de un péndulo está dada por $v = 0.44\sqrt{2-x}$, donde x es el desplazamiento vertical (en centímetros) de la pelota desde su posición de reposo.



a) Traza la gráfica de v para $0 \le x \le 2$.
b) Describe la relación entre esta gráfica y el comportamiento físico de la pelota cuando esta oscilando.

4) De un tronco de un árbol cuyo diámetro es de 2 m, se desea cortar una viga de sección rectangular. De forma experimental se sabe que habrá resistencia máxima cuando $r = x\,y^2$. Calcular la resistencia en función de la altura de la viga, donde x representa el ancho y y la altura.



AUTOEVALUACIÓN

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para probar esta unidad y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto o tus notas durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas un breve resumen de la unidad que puedes consultar. Esperamos que esta autoevaluación la termines en 2 horas como máximo.

Encuentra: dominio, rango y asíntotas de cada función y traza su respectiva gráfica:

1) $m(x)=\frac{1}{3-x}+4$

2) $k(x)=-\frac{5}{x+2}-3$

3) $f(x)=-\frac{3}{(x+1)^2}$

4) $h(x)=\frac{2}{x^2+2x-8}$

5) $g(x)=-\sqrt{6-2x}$

6) $p(x)=\sqrt{5x-x^2}$

7) $F(x)=\sqrt{x+4}-3$

8) $Q(x)=-\sqrt{x^2-4x+9}$

9) Determina la asíntota inclinada, la asíntota vertical, los ceros de la función y traza la gráfica de $f(x)=\frac{x^2-2x-8}{x}$

10) Después de inyectar cierto medicamento en un paciente, se supervisa la concentración c de la droga en la sangre. En el momento t $\geq$ 0 (en minutos desde el momento de la inyección), la concentración en mg/l está dada por

$$c(t)=\frac{30t}{t^2+2}$$

a) Traza la gráfica de la concentración de la medicina.
b) ¿Qué ocurre finalmente con la concentración de la medicina en la sangre?

ESCALA:

Para considerar si has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 3, 5, 6 y 7 pero no has logrado todos los objetivos, SÓLO LOS BÁSICOS. Si resuelves también la 4 y la 8 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 9 y 10, ¡FELICIDADES!, lograste todos los objetivos de la unidad y estas listo para continuar con la siguiente. Si resuelves menos de 6 preguntas, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad y hacer todos los ejercicios propuestos.

¿QUIÉN TIENE?....., YO TENGO.......

De funciones racionales y con radicales

Proponemos este juego para reafirmar los conceptos vistos en esta unidad.

- Son un total de 48 cartas, en las que se tienen impresas graficas de diferentes funciones racionales o con radicales y al reverso de estas se encuentra escrita una función que puede ser de un tipo o de otro.
- Participa todo el grupo y se inicia repartiendo las cartas de acuerdo al número de alumnos.
- Cada alumno debe analizar las cartas que le han sido asignadas, tanto la gráfica como la ecuación para que tenga una idea de cuál es la expresión de la función que espera y que curva espera que le muestren.
- Es conveniente que el juego lo inicie el profesor ya que el que empieza es el que termina.
- Se debe estar pendiente de que las graficas correspondan a las expresiones mostradas.

Este juego nos ayuda mas que nada para que los alumnos aprendan a analizar las gráficas de las funciones racionales y con radicales, sobre todo que las puedan distinguir y diferenciar, aumentando así sus registros de las funciones, visualizando las imágenes.