UNIDAD 2.
FUNCIONES RACIONALES Y CON RADICALES

Propósitos: Continuar con el estudio de las funciones, a través de las funciones racionales y con radicales. Analizar su comportamiento en el que cobra relevancia identificar su dominio de definición, su rango y los puntos de ruptura.

Leonard Euler (1707-1783), matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar. Euler nació en Basilea, hijo de un pastor. Estudió en la Universidad del lugar con el matemático suizo Johann Bernoulli, licenciándose a los 16 años. Fue nombrado catedrático de física en 1730 y de matemáticas en 1733. En 1741 fue profesor de matemáticas en la Academia de Ciencias de Berlín a petición del rey de Prusia, Federico el Grande. Euler regresó a San Petersburgo en 1766, donde permaneció hasta su muerte. Aunque obstaculizado por una pérdida parcial de visión antes de

cumplir 30 años y por una ceguera casi total al final de su vida, Euler produjo numerosas obras matemáticas importantes, así como reseñas matemáticas y científicas. Euler realizó el primer tratamiento analítico completo del álgebra, la teoría de ecuaciones, la trigonometría y la geometría analítica. Leonhard Euler fue, probablemente uno de los investigadores más fecundos de las matemáticas, hasta tal punto que el siglo XVIII se conoce como la época de Euler.

Euler era una persona de extraordinario talento y con gran facilidad para los idiomas. Se casó y tuvo trece hijos, de cuya educación se preocupó personalmente. Se dice que su capacidad de trabajo era tan grande que escribía memorias matemáticas mientras jugaba con sus hijos. En 1748 publicó la obra *Introductio in analysim infinitorum*, en la que expuso el concepto de función en el marco del análisis matemático, campo en el que así mismo contribuyó de forma decisiva con resultados como el teorema sobre las funciones homogéneas y la teoría de la convergencia. Desarrollo la teoría de las funciones trigonométricas y logarítmicas (introduciendo de paso la notación e para definir la base de los logaritmos naturales). En el ámbito de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo. Entre 1768 y 1772 escribió sus *Lettres à une princesse d'Allemagne*, en las que expuso concisa y claramente los principios básicos de la mecánica, la óptica, la acústica y la astrofísica de su tiempo. En 1783 falleció de repente mientras jugaba con unos de sus nietos.

2. PRESENTACIÓN.

La idea de función es importante no solo en matemáticas, sino en cualquier ciencia que desee establecer nexos entre sus objetos de estudio, pues es una de las mejores formas de poner en correspondencia una cantidad con otra. El universo esta lleno de objetos que se encuentran asociados con otros, de hecho podríamos decir que a lo largo de la historia del hombre, en su deseo de interpretar el mundo, ha establecido relaciones con los objetos que lo rodean. Sin embargo, paso mucho tiempo antes de que el pudiera establecer una notación útil para representar la dependencia de las características de un objeto y otro.

En particular en física en el estudio de la naturaleza al analizar el movimiento y el cambio, se establece de palabra, no formalmente como ahora lo conocemos la relación entre el espacio y el tiempo en el movimiento uniforme. Así van surgiendo los estudios de diferentes fenómenos y por lo tanto la relación de las variables involucradas cuyas variaciones resultan ser de diferentes tipos. Pero es Euler quien lleva más allá la idea de función, dándole la posibilidad de estudiarlas como entes matemáticos propios pues hasta ese momento eran consideradas como herramientas de resolver problemas, generalmente relacionados con la Física.

María Gaetana Agnesi (1718-1799) en 1748 publica su tratado Intituzioni Analitiche ad uso della giovenù italiana en donde hace un estudio de las curvas que pueden escribirse de la forma: $f(x)=\frac{a^3}{x^2+a}$, un caso particular de función racional de segundo grado.

Continuemos con el análisis de las funciones racionales y con radicales que siguen siendo funciones algebraicas como las de la unidad anterior. Poniendo atención: en la expresión que las identifica, su dominio y rango, en el cambio de sus respectivas gráficas, así como en la aparición de las asíntotas en las funciones racionales y las diferentes formas de las gráficas de las funciones con radicales relacionándolas con las cónicas vistas en matemáticas 3.

Siguiendo la temática del programa van apareciendo los aprendizajes marcados en éste, así como las sugerencias pertinentes sobre los puntos donde se debe tener mayor cuidado.

2.1 SITUACIONES QUE DAN LUGAR A FUNCIONES RACIONALES

Aprendizajes:

- *Explora situaciones o problemas que dan lugar a una función racional, en particular las que involucran variación inversa o inversamente proporcional al cuadrado de la variable.*
- *Analiza las relaciones y comportamientos que le permitan obtener información para establecer su representación algebraica.*
- *Establece la regla de correspondencia de una función racional, asociada a un problema.*

Se propone iniciar la unidad con algún ejemplo de aplicación que involucre fenómenos de variación inversamente proporcional como los que se mencionan a continuación. Estos se dividen en dos grupos, el primero para que el profesor elija algunos para exponerlos en su clase en forma más detallada y el segundo son actividades para que los alumnos reflexionen e interactúen con ésta.

Ejemplo 1: La corriente (i) en un conductor eléctrico varía inversamente con respecto a la resistencia (R) del conductor.

a) Si La corriente es de $\frac{1}{2}$ Amper cuando la resistencia es de 240 ohms, expresa la corriente en función de la resistencia del conductor.
b) ¿Cuál es la corriente del conductor cuando la resistencia es de 540 ohms?

Solución:

a) El enunciado del problema se representa con el siguiente modelo matemático (variación inversa)
$i(R) = \frac{k}{R}$, donde i es la corriente que circula por el cable conductor y R es la resistencia del conductor.

Sustituyendo los valores dados en la expresión.

$0.5 = \frac{k}{240}$, de donde k = (0.5)(240) = 120, y la función buscada es la siguiente.

$$i(R) = \frac{120}{R},$$

Hacer ver cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente

b) El valor de la intensidad cuando la resistencia es de 540 ohms es de:
$i(\mathrm{R}) = \frac{120}{540} \cong 0.22\, ampers$.

Se puede seguir con el comportamiento gráfico de la función $i(R)$ variando la resistencia del cable de manera que tome los valores que se muestran en la tabla y realizando las operaciones necesarias para encontrar los valores correspondientes de la corriente en cada caso.

R	720	640	600	560	520	480	420	360	300	240	200	120
i												

El profesor puede plantear preguntas como las siguientes:

Si los valores de la resistencia aumentan, ¿qué pasa con los valores de la intensidad de corriente?
Si los valores de la resistencia disminuyen, ¿qué pasa con los valores de la intensidad de corriente?
¿Qué pasa con el valor de la intensidad de corriente si el valor de la resistencia se acerca a cero?
¿Qué pasa con el valor de la intensidad de corriente si el valor de la resistencia se hace cada vez más grande?

En un sistema de coordenadas se puede trazar la gráfica, escribiendo la variable que se representa en cada uno de los ejes y localizando los puntos que se obtienen de la tabla, para observar el comportamiento gráfico de esta función.

Ejemplo 2) El peso (w) de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia (r) al centro de la tierra.

a) Suponiendo que un cuerpo pese 200 kg en la superficie terrestre, expresa el número de kilogramos de peso en función del número de kilómetros al centro de la tierra. Supón que el radio de la tierra es de 6 400 kilómetros.
b) ¿Cuánto pesara el cuerpo a una distancia de 400 kilómetros por encima de la superficie terrestre?

Solución:

a) En este caso la expresión que relaciona las variables del problema es de la forma: $w = \frac{k}{r^2}$, donde w es el peso del cuerpo, r es la distancia del cuerpo al centro de la tierra y k es la constante de proporcionalidad.

De acuerdo a los valores del problema se puede establecer la ecuación:

$200 = \frac{k}{40.96\times10^6}$, $(2\times10^2)(40.96\times10^6) = k$, El valor de k es: $k = 81.92\times10^8$.

Sustituyendo el valor de k en la expresión propuesta $w(r) = \frac{81.92\times10^8}{r^2}$

Distinguir la variable independiente y dependiente

b) Ahora que hemos establecido la función podemos calcular el valor del peso del cuerpo cuando este a 400 kilómetros por encima de la superficie de la tierra.

Sustituyendo r = 6 800 kilómetros = 6.8x10^3,

$$w(6.8\times10^3) = \frac{81.92\times10^8}{(6.8\times10^3)^2} = \frac{81.92\times10^8}{46.24\times10^6} = 1.771626\times10^2 = 177.16 \text{ Kilogramos}$$

Si suponemos que lo más cerca que puede estar el objeto del centro de la tierra es la distancia de 2500 kilómetros y lo más lejos es una distancia de 5000 kilómetros, completando la siguiente tabla (los pesos se calculan con un decimal)
.

r	2500	2600	2700	2800	3000	3200	3500	3800	4000	4300	4600	5000
w												

En un sistema de coordenadas escribir en cada uno de los ejes la variable que se representa y localizar los puntos obtenidos para observar el comportamiento gráfico de esta función.

Nota para el profesor: Se debe resaltar que el modelo obtenido para estudiar este problema es de la forma: $f(x) = \frac{k}{x^2}$ (variación inversa)

Donde k es una constante y x es la variable independiente, f es inversamente proporcional a x cuadrada, también hay que comparar con los modelos de otros problemas.

Actividades para los alumnos

Actividad 1) Supongamos que tenemos un rectángulo de área constante, e igual a 40 centímetros cuadrados y queremos ver la variación de la base del rectángulo en función de la longitud de la altura del rectángulo.

Solución:

a) Escribe la fórmula del área de un rectángulo, si b es la base, t es la altura y A es el área del rectángulo: ______________________________________.

b) Al sustituir el valor del área del rectángulo se obtiene la siguiente expresión: ____.

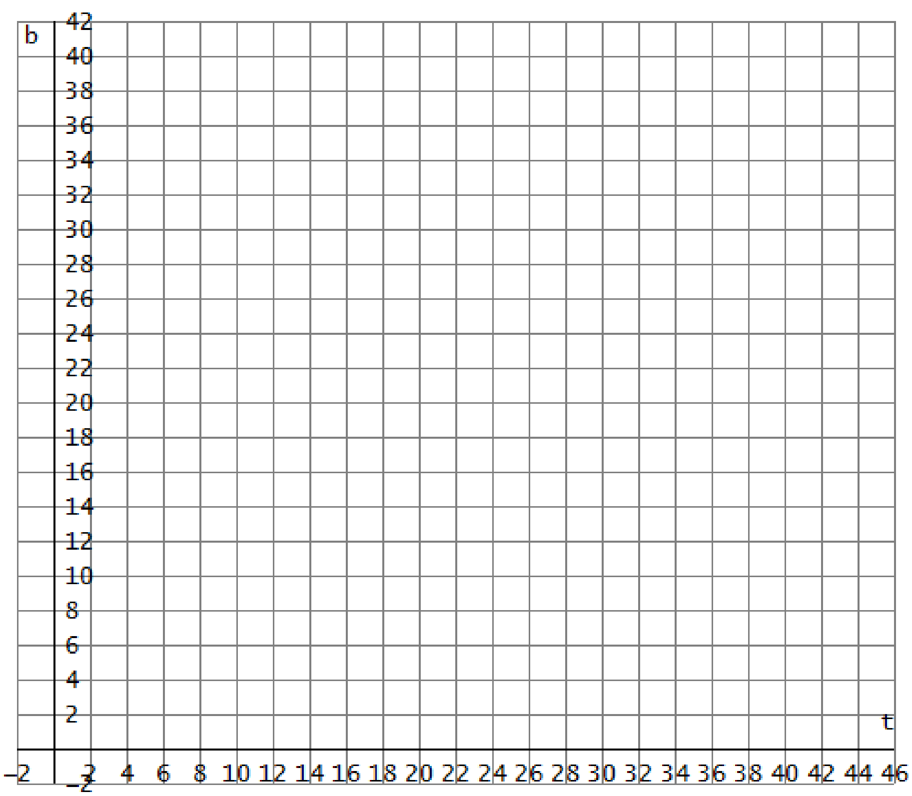
c) Al despejar la base de la expresión anterior se obtiene la siguiente expresión que representa la función que nos da la variación de la base en función de la altura: _____________________________.

d) Como puedes observar la expresión es de la forma: $f(x) = \frac{k}{x}$, donde k es una constante y x es la variable independiente. La expresión que se obtiene para este ejercicio es la siguiente. $b(t) = \frac{40}{t}$

e) Considerando la fórmula anterior completa la siguiente tabla de valores de acuerdo a los valores dados a la altura del triángulo:

t	1	3.5	5	9.2	10	12	14.1	20	25	28.4	32	39
b												

f) Ahora localiza los puntos de la gráfica que se forman al tomar las parejas de valores de la tabla anterior en el siguiente sistema de coordenadas.



g) Considerando que el dominio de una función es el conjunto de valores que la variable independiente puede tomar y para los cuales la función está bien definida, el dominio de la función de este ejemplo es: ______________________
h) De acuerdo al dominio que acabas de determinar el rango de la función es el siguiente conjunto de números reales: ______________________________
i) ¿Qué pasa con el valor de la función si hacemos que el valor de la altura sea t = 0?: ____

Para ver el comportamiento de los valores de la función (la base del rectángulo) completa la siguiente tabla de valores, donde el valor de la altura (t) se acerca a cero.

t	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
b												

En los ejemplos anteriores hemos visto que las funciones que permiten modelarlos son de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{k}{x^2} \quad \text{o} \quad f(x) = \frac{k}{x}$$

Una **función racional** es aquella que se puede escribir como el **cociente de dos funciones polinomiales,** $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ donde las funciones g(x) y h(x) son funciones polinomiales y el valor de h(x) es diferente de cero.

Actividad 2) Sebastián y sus amigos tienen que ir a la casa de Adriana a una fiesta, si la distancia de la escuela a la casa de Adriana es de 400 kilómetros, utilizando esta información contesta las siguientes preguntas.

a) Escribe la fórmula para encontrar la velocidad de un auto que recorre d kilómetros en un tiempo de t horas. ________________________________
b) Despeja de la fórmula anterior la variable t, el tiempo. __________________

La fórmula que se obtiene nos permite calcular el tiempo en función de la velocidad empleada.

c) En la siguiente tabla están anotadas las diferentes velocidades que emplearon Sebastián y sus amigos en llegar a la casa de Adriana, en cada caso calcula el tiempo empleado por cada uno de ellos, utilizando la función obtenida.

Velocidad	75	90	95	100	110	115	120	130
tiempo								

Si la mínima velocidad permitida es de 50 kilómetros por hora y la máxima es de 160 kilómetros por hora, el dominio de la función es el intervalo [50, 160]

d) Utilizando la función obtenida para calcular el tiempo en función de la velocidad. ¿Cuál es el rango de la función? ______________
e) ¿Qué pasa con los valores del tiempo que lleva recorrer la distancia, si pudiéramos incrementar la velocidad de uno de los autos cada vez más? ______________________________.
f) ¿Qué pasa con la gráfica de la función para los puntos obtenidos en el inciso e, con respecto al eje de las abscisas? _____________________________

g) Investiga que nombre recibe la recta que se aproxima a la gráfica de la función a medida que a la velocidad se le asignan valores cada vez más grandes, pero que nunca la toca.

____

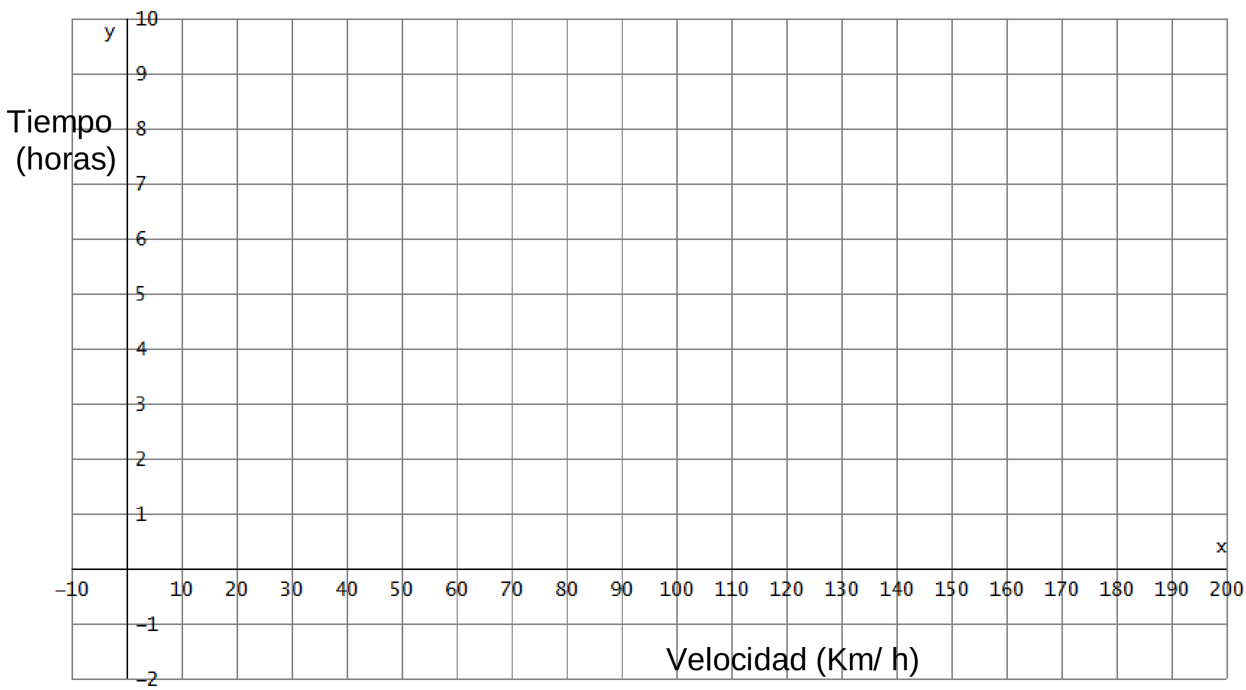
h) ¿Qué pasa con los valores del tiempo que lleva recorrer la distancia, sí el valor de la velocidad de uno de los autos disminuye gradualmente? ____________________________________

i) ¿Qué pasa con los puntos de la gráfica de la función obtenidos en el inciso h, con respecto al eje de las ordenadas? _______________________________

j) El comportamiento de la gráfica de la función cuando los valores de la velocidad disminuyen gradualmente con respecto al eje de las ordenadas, ¿es parecido al comportamiento de la gráfica de la función cuando la velocidad del auto aumenta cada vez más, con respecto al eje de las abscisas?_________

k) Si tu respuesta en el inciso anterior fue SI, el eje de las ordenadas es ______ ____________________ de la gráfica de la función.

Con la información obtenida dibuja la gráfica de la función en el siguiente sistema de coordenadas.



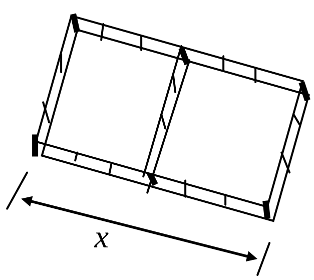
Como puedes observar la función obtenida en este problema tiene la misma estructura que ya se obtuvo para otros problemas y es de la forma:

$f(x) = \frac{k}{x}$, donde k es una constante, f es inversamente proporcional a x.

Actividad 3) Suponiendo que el tiempo que una especie de fruta requiere para madurar es inversamente proporcional a la temperatura Fahrenheit y que ésta a una temperatura de 76 °F se madura en 24 días. ¿Qué tiempo se requerirá cuando la temperatura sea de 80 °F.

Solución:
Primero tenemos que escribir la relación que hay entre el tiempo de maduración de la fruta y la temperatura o sea t (tiempo) en función de T (temperatura). Hay una relación **"inversamente proporcional"** y la ecuación que se le asigna es, $y=\frac{k}{x}$, **"y es inversamente proporcional a x"** donde k es la **constante de proporcionalidad.**

a) Como t es inversamente proporcional a T, tenemos la ecuación: ___________
b) De acuerdo a las condiciones que se nos dan, T = _________ t = __________,
c) Sustituyendo en $t=\frac{k}{T}$, se tiene:
d) Despejando k : k =
e) El tiempo de maduración de la fruta en función de la temperatura lo podemos expresar como: $t(T)=\frac{1824}{T}$ y esta es una función racional.
f) El tiempo de maduración de la fruta cuando la temperatura aumenta a 80 °F es: ___________________________



Solución.-
a) El área de todo el pedazo cercado es de: ___________
b) El área del rectángulo en términos de x es:
A = (ancho) (largo) = ( )( )
c) Sustituyendo el valor del área y despejando al ancho a, tenemos a =

Actividad 4) Se va a cercar un pedazo rectangular de tierra de forraje y se va a dividir en dos porciones iguales por medio de un cercado adicional paralelo a dos lados. La porción de tierra tiene 400 m^2. Expresa la cantidad de cercado F en términos de la longitud x mostrada en la figura.

d) El total de cerca es el perímetro del rectángulo más la cerca central, así que
F = 2 veces el largo + 3 veces el ancho

$$F = (\quad) + (\quad)$$

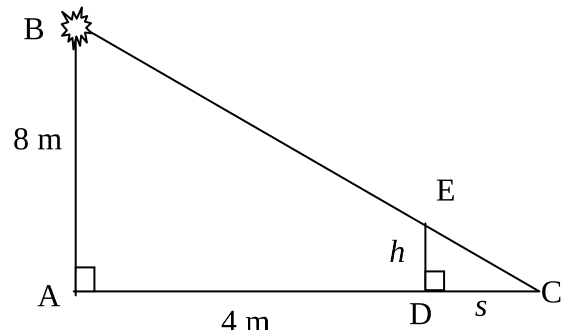
e) Sustituyendo el ancho en términos de x

$$F=2x+\frac{3(400)}{x}$$

f) Realizando las operaciones necesarias llegamos a que la cantidad de cercado F en función de x es:

$$F(x)=\frac{\qquad\qquad}{x}$$ es una función racional.

Actividad 5) En la siguiente figura s es la longitud de la sombra que proyecta una persona de h metros de altura parada a 4 metros de una fuente luminosa que está a 8 metros sobre el nivel del piso. Expresa a h en función de s.



Solución:
De acuerdo a la figura tenemos dos triángulos así que:

a) El triángulo ABC es semejante al triángulo ______________, ¿por qué? ____

b) Los lados correspondientes de triángulos semejantes son _________________

Entonces: $$\frac{DE}{AC} = \frac{}{}$$

c) Sustituyendo los valores de acuerdo a la figura tenemos

$$\frac{}{8} = \frac{}{AC}$$

d) Pero el segmento AC se puede escribir como la suma de los segmentos $AD + DC$, que es lo mismo a AC = 4 + s y llegamos a la expresión:

$$\frac{h}{8} = \frac{s}{s+4}$$

e) Despejando la altura h, $h = \dfrac{8s}{s+4}$

f) En notación funcional $h(s) = \dfrac{8s}{s+4}$ la cuál también es una función racional.

Ejercicios 2.1

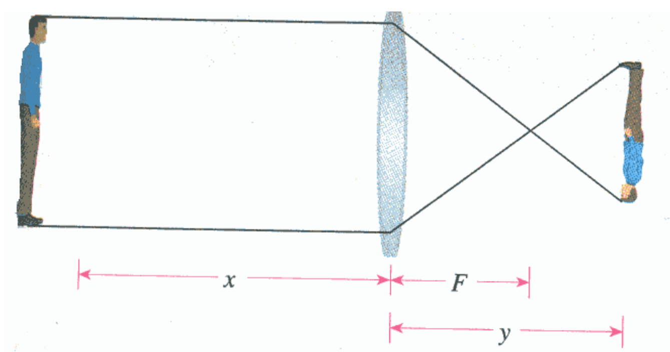
Para cada problema encontrar la función racional que lo represente.

1) En un cable conductor de longitud fija, la resistencia eléctrica (R) es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro (d) del cable.

a) Suponiendo que un cable de longitud constante tenga $\frac{1}{2}$ centímetro de diámetro y su resistencia sea de 0.1 Ω (ohm), expresa el número de ohms de resistencia en función del número de centímetros del diámetro.
b) ¿Cuál es la resistencia de un cable de longitud fija y un diámetro de $\frac{2}{5}$ centímetros.

2) Una lata cilíndrica de altura h y radio r, tiene 50 cm^3 de volumen. Expresa su altura en función del radio.
3) Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Expresa el perímetro P del rectángulo como una función de la longitud x de uno de sus lados.
4) Una caja rectangular abierta con un volumen de 4 m^3 tiene una base cuadrada. Expresa el área de la superficie A de la caja como una función de la longitud x de un lado de la base.
5) Una fotocopiadora tiene un precio inicial de $2 500. Un contrato por servicio y mantenimiento cuesta $ 200 el primer año y aumenta $ 50 por cada año subsecuente. Encuentra el costo total de la fotocopiadora después de n años y expresa al costo promedio por año, $\bar{C}(n)$, en función del número de años.
6) Para que una cámara con una lente de longitud focal fija F, enfoque sobre un objeto que está a una distancia x de la lente, la película debe estar colocada a una distancia y por detrás de la lente, donde F, x y y se relacionan de la siguiente forma

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}$$



Suponga que la cámara tiene una lente de 55 mm (F = 55).
a) Expresa a y como una función de x.
b) ¿Qué le ocurre a la distancia de enfoque y conforme el objeto se aleja de la lente?
c) ¿Qué le ocurre a la distancia de enfoque y conforme el objeto se acerca a la lente?

7) El tiempo (t) requerido para realizar un trabajo varia inversamente con respecto al número de personas (P) que trabajan en él. 12 personas tardan 4 horas en edificar varias gradas de un estadio de futbol.
a) Expresa el número de horas en realizar la misma tarea en función del número de personas.
b) Encuentra el tiempo que tardaran 3 personas en realizar la misma tarea.

c) Indica de acuerdo a las condiciones del problema, cuál es el dominio de la función.
d) De acuerdo al dominio de la función realiza una tabla de valores y luego traza la gráfica correspondiente.

8) El tiempo (t) requerido para que una bomba de desagüe vacíe un tanque varía inversamente respecto al ritmo (r) de la bomba de desagüe. Una bomba puede vaciar un tanque en 45 minutos a un ritmo de 600 kilolitros por minuto.
a) Expresa el tiempo requerido para vaciar el tanque en función del ritmo.
b) ¿Cuánto tiempo se tardará en vaciar el tanque si la bomba trabaja a un ritmo de 1000 kl/m?
c) Determina el dominio de la función?
d) Realiza una tabla de valores para que hagas la gráfica de la función.

9) En el problema 1, el tipo de función racional que se obtuvo es de la forma f(x) = $\frac{k}{x^2}$.
a. Para la función $f(x)=\frac{k}{x^2}$ Investiga el dominio, o sea el conjunto de valores de x, para los cuales esta definida la operación y se puede encontrar el valor de la función __________ (k=10)
b. Completa la siguiente tabla de valores, para ver el comportamiento de la función f(x), cuando los valores de x se acercan a 0, con x > 0.

X	5	4	3	2	1	0.5	0.1	0.01
f(x)								

c. Completa la siguiente tabla de valores, para ver el comportamiento de la función f(x), cuando los valores de x se acercan a 0, con x < 0.

X	-5	-4	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	-0.01
f(x)								

d. ¿Qué pasa con $f(x_0)$, cuando $x_0 = 0$? ____________________________
e. El comportamiento de la función cuando x se aleja del origen, con x > 0 se obtiene al completar la siguiente tabla de valores.

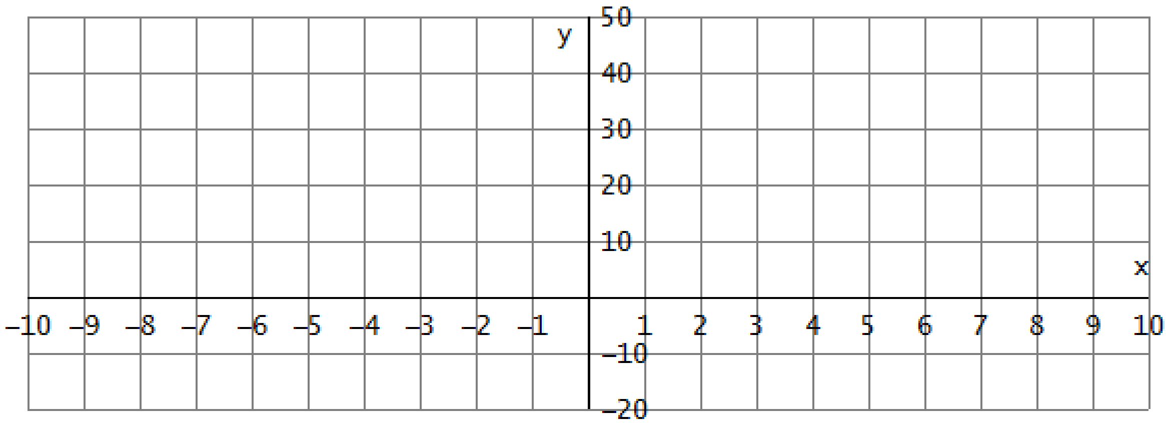
X	10	20	30	40	50	100	500	1000
f(x)								

¿Qué pasa con los valores de la función? ________________________
f. Para tener el comportamiento de la función cuando x se aleja del origen, con x < 0, completa la siguiente tabla de valores.

X	-10	-20	-30	-40	-50	-100	-500	-1000
f(x)								

¿Qué pasa con los valores de la función? ________________________
g. ¿Tiene ceros la función f(x)? los valores de x, tal que f(x) = 0 ________
h. Investiga el nombre que recibe la recta que se acerca a la gráfica de una función de manera indefinida pero nunca la corta? _________________

i. ¿Cuáles son las asíntotas de la función f(x)? ________________________
j. ¿Para que valor de x, la gráfica de f(x) tiene un punto de ruptura? ______
k. Grafica todos los puntos obtenidos en el siguiente sistema de coordenadas.



10) En un cable conductor de longitud fija, la resistencia eléctrica es inversamente proporcional al cuadrado del diámetro del cable.

a. Suponiendo que un cable de longitud constante tenga 1 cm de diámetro y su resistencia sea de 0.1 Ω (ohm) , expresa el número de ohms de resistencia en función del número de centímetros de diámetro.
b. ¿Cuál es la resistencia del cable de longitud fija, si el diámetro tiene alguno de los valores que se indican en la siguiente tabla?

Diámetro	0.2	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.8
Resistencia							

c. ¿Cuál es el dominio de la función? ________________________________
d. ¿Qué pasa con el valor de la resistencia, si el diámetro del cable se acerca a 0? ____
e. ¿Qué pasa con el valor de la resistencia, si el diámetro del cable aumenta? _______________
f. ¿Cuál es el rango de la función? _________________________________
g. Con la información obtenida, traza la gráfica de la función en un sistema de coordenadas.

Sugerencia: La función para obtener la resistencia es de la forma, $\mathbf{R(d)=\frac{K}{d^2}}$.

PARA REVISAR VARIACIÓN PROPORCIONAL INVERSA SE PUEDE IR A LA SIGUIENTE PÁGINA:
http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas38.htm

2.2 NOCIÓN DE INTERVALO EN LA RECTA REAL

Aprendizajes:
Asociará conjuntos de números con la notación de intervalo, lo cuál es necesario para establecer el dominio y rango restringidos por las condiciones del problema.

Un intervalo es un conjunto de números reales x que satisfacen una desigualdad, por lo que un intervalo puede ser cerrado, abierto o semiabierto, lo podemos representar en forma de intervalo, en forma de desigualdad o en forma gráfica sobre la recta numérica, lo que necesitamos para tener un intervalo es en primer lugar dos extremos, izquierdo y derecho que pueden ser números o símbolos y el número más pequeño siempre va a la izquierda; para abrir o cerrar el intervalo se usan paréntesis ( ) o corchetes [ ] o una combinación de los dos para el semiabierto.

Cuando iniciamos con paréntesis significa que el extremo izquierdo no esta incluido en el intervalo y si iniciamos con corchete ahora si esta incluido; cuando terminamos con paréntesis ahora el extremo derecho no esta incluido y si lo hacemos con corchetes si esta incluido.

Las desigualdades involucran los símbolos: < menor que, > ___________,
≤ _______________________ y ≥ ______________________.

La recta numérica esta representada por el intervalo $(-\infty, \infty)$, donde el símbolo infinito se refiere a que se extiende hacia la izquierda y hacia la derecha indefinidamente y este intervalo representa el conjunto de los números reales R.

Completa la siguiente tabla

Intervalo	Desigualdad	Gráfica	Tipo de intervalo
$(-2, 5)$			
$[4, \infty)$			Semiabierto
$(-\infty, 5]$			
	$3 < x \leq 10$		
	$-5 \leq x \leq 2.5$		
$(-\infty, -1)$			
	$-8 < x < -2$		
$[5, 20]$			
$(-3, 7]$			
	$\sqrt{5} \leq x < 5$		
$(½, \infty)$			

PARA UNA MEJOR COMPRENSIÓN DE ESTE TEMA SE PUEDEN UTILIZAR LOS SIGUIENTES VIDEOS:
http://www.dailymotion.com/video/x8xemp_analisis-1-matematica-la-recta-nume_tech
http://www.youtube.com/watch?v=LnK47p17AtQ&feature=related

2.3 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO ANALÍTICO Y GRÁFICO DE LAS FUNCIONES RACIONALES POR MEDIO DEL DOMINIO Y RANGO DE LAS FUNCIONES DEL TIPO:

$\boldsymbol{f(x)=\frac{a}{x+b}+c}$, $\boldsymbol{f(x)=\frac{a}{(x+b)^2}+c}$ y $\boldsymbol{f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}}$ con $\boldsymbol{p(x)}$ y $\boldsymbol{q(x)}$ lineales o cuadráticas, donde a, b y c son números reales.

Aprendizajes:

- *A partir de la regla de correspondencia de una función racional, elabora una tabla de valores que le permita construir su gráfica e identifica su(s) punto(s) de ruptura y asíntotas.*
- *Identifica el dominio de definición y el rango de una función racional, a partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema.*
- *Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica de una función racional, y obtiene conclusiones sobre el problema correspondiente.*

Una función racional se puede escribir como el cociente de dos funciones polinomiales $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ y está definida para todo valor de x tal que $q(x) \neq 0$.

Se analiza, de acuerdo al grado de $p(x)$ y de $q(x)$, la forma de su gráfica y la información que se obtiene al encontrar los ceros de estas dos funciones.

2.3.1 Funciones de la forma $f(x)=\frac{a}{x+b}+c$

Para las funciones de esta forma es conveniente que el profesor inicie con las funciones más sencillas, es decir, cuando b y c valen cero variando el valor de a, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1) Considerando que las funciones del tipo $f(x)=\frac{k}{x}$ aparecen en diferentes problemas vamos a analizarla para determinar su dominio, su rango, su gráfica y todas las características para después aplicar esto a otras funciones racionales.

Solución:

En este caso k = 1, y la función que se va a investigar es $f(x)=\frac{1}{x}$, recordar que $x \neq 0$, entonces el dominio de la función $f(x)$ son todos los números reales menos el cero, dicho conjunto lo podemos escribir como se muestra a continuación.

D_f = {x / x es un número real, con x distinto de cero} = {x / x ε R y $x \neq 0$}

Observar que la función no tiene raíces ya que el numerador es una constante.
Para estudiar el comportamiento de la función se pueden contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Qué podemos decir de los valores de la función $f(x)$ cuando x toma valores que se aproximan a cero, pero no es igual?
2. ¿Qué podemos decir de los valores de la función $f(x)$ cuando x es grande en magnitud y positiva, o cuando x es grande en magnitud y negativa?

Para contestar estas preguntas se hace uso de las siguientes tablas.
Valores de x muy cercanos a cero por la derecha.

x	1	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.01
f(x)	1	1.6	2	2.5	3.33	5	10	100

Ahora valores de x muy próximos a cero por la izquierda

x	-1	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	-0.01
f(x)	-1	-1.6	-2	-2.5	-3.33	-5	-10	-100

Nota para el profesor: Hay que hacer ver que los valores de la función se hacen cada vez más grandes (magnitud grande y positivos) cuando se acerca a cero por la derecha y cada vez más pequeños (magnitud grande y negativos) cuando se acercan por la izquierda. Por lo que el eje de las ordenadas es una **asíntota vertical** a la gráfica de la función.

Haciendo un análisis similar para valores de x que se alejan de cero, ya sea por la izquierda o por la derecha se tiene:

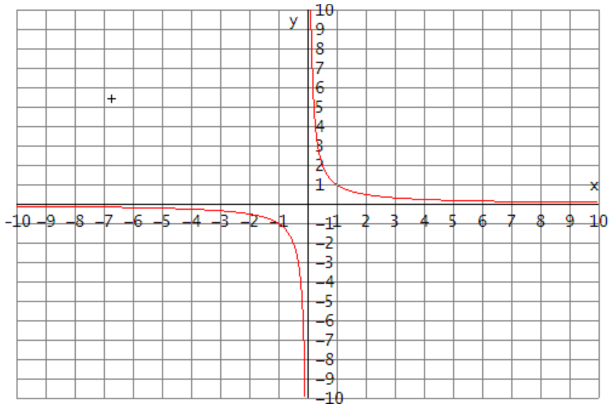
x	5	10	20	50	100	500	800	1000
f(x)	.2	.1	0.05	0.02	0.001	0.002	0.00125	0.001

x	-5	-10	-20	-50	-100	-500	-800	-1000
f(x)	-.2	-.1	-0.05	-0.02	-0.001	-0.002	-0.00125	-0.001

Los valores de f(x) se aproximan a cero, pero nunca son cero, Por lo que el eje de las abscisas es una **asíntota horizontal** a la gráfica de la función. Como f(x) nunca es cero, esto nos indica que cero no pertenece al rango, es decir el rango de la función es:

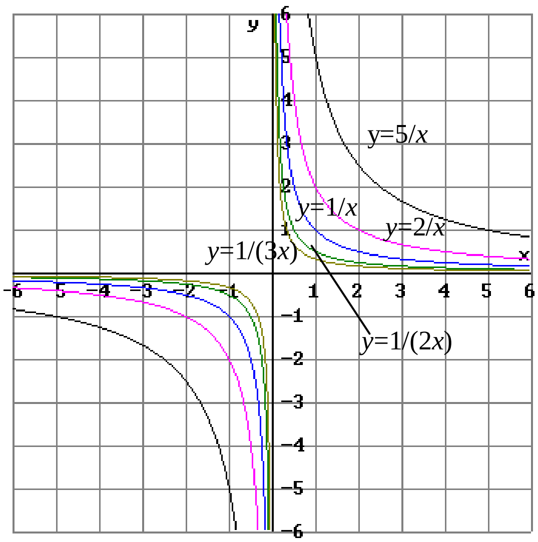
R_f = {y / y es un número real, con y distinto de cero} = { y / y ε R, $y \neq 0$}

Estas observaciones se pueden apreciar con mejor claridad al trazar la gráfica con una escala adecuada.



Ejemplo 2) Si multiplicamos a $f(x)=\frac{1}{x}$ por una constante veamos que es lo que sucede, así que sobre el mismo plano grafiquemos las siguientes funciones: $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{5}{x}$, $\frac{1}{2x}$ y $\frac{1}{3x}$

x	$1/x$	$2/x$	$5/x$	$1/2x$	$1/3x$
0.2	5	10	25	2.5	1.66667
0.4	2.5	5	12.5	1.25	0.83333
0.8	1.25	2.5	6.25	0.625	0.41667
1	1	2	5	0.5	0.33333
2	0.5	1	2.5	0.25	0.16667
3	0.33333	0.667	1.667	0.167	0.11111
-0.2	-5	-10	-25	-2.5	-1.6667
-0.4	-2.5	-5	-12.5	-1.25	-0.8333
-0.8	-1.25	-2.5	-6.25	-0.625	-0.4167
0.1	10	20	50	5	3.33333
-2	-0.5	-1	-2.5	-0.25	-0.1667
-3	-0.33333	-0.667	-1.667	-0.167	-0.1111



Conforme va creciendo el número por el que se multiplico a la función la gráfica tarda más en pegarse a los ejes o sea que decrece menos que la original y si la constante es menor que 1 entonces decrece más rápido que la original, se pegan más rápido a los ejes, en la figura se ve que la que esta más pegada a los ejes es $\frac{1}{3x}$ y luego le sigue $\frac{1}{2x}$ y así van separándose las otras,

Nota para el profesor: Hay que recordar que el número por el que multiplicamos nos da el índice de crecimiento, se alarga verticalmente si multiplicamos por un número mayor que 1, y se da la compresión vertical si multiplicamos por un número entre cero y uno.

El dominio y el rango de las funciones anteriores son:

D_f = {x / x es un número real, con x distinto de cero} = {x / x ε R y $x \neq 0$}

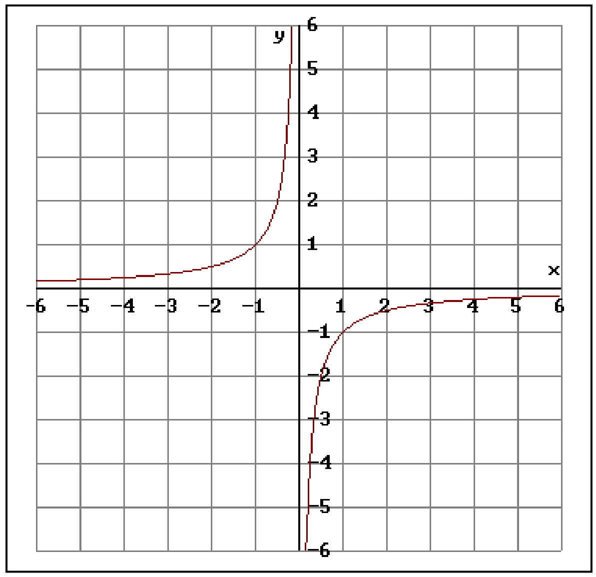
R_f = {y / y es un número real, con y distinto de cero} = {y / y ε R, $y \neq 0$}

Ejemplo 3) Traza la gráfica de $g(x) = -\frac{1}{x}$

Solución:

Evaluando en algunos puntos, la gráfica queda como sigue:

X	$g(x) = -\frac{1}{x}$
0.2	-5
0.4	
0.8	-1.25
1	
2	-0.5
3	
-0.2	
-0.4	2.5
-0.8	
0.1	
-2	0.5
-3	



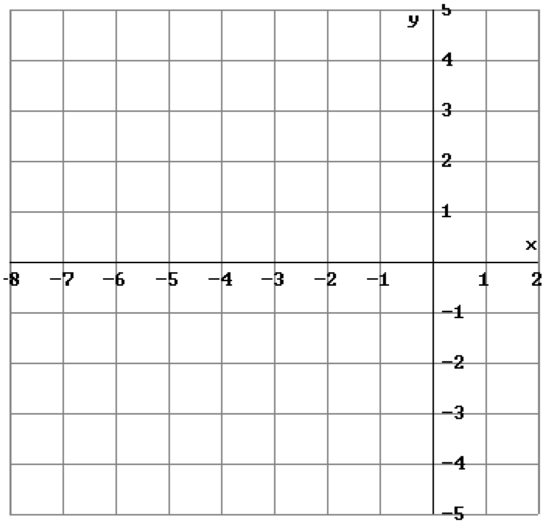
La gráfica se invierte sobre el eje X, el dominio y el rango quedan igual y con las asíntotas sucede lo mismo.

Los siguientes ejemplos se pueden dejar como actividades para los alumnos.

Actividad 1) Encuentra el dominio y el rango de F(x) = $\frac{1}{x+3}$ y traza su gráfica así como las asíntotas.

Solución.-

La división entre cero no esta permitida así que el dominio son todos los números reales menos el valor que hace que $x + 3 = 0$, o sea $x = -3$, por lo que ahora vamos a evaluar alrededor de $x = -3$. Completa la tabla y localiza los puntos sobre el plano.



x	F(x)=1/(x+3)	x	F(x)=1/(x+3)
-2.8	5	-3.2	-5
-2.6		-3.4	-2.5
-2.4		-3.6	-1.6666667
-2.2	1.25	-3.8	
-2	1	-4	-1
-1.5	0.6666667	-4.5	
-1		-5	-0.5
0		-6	-0.3333333
1	0.3125	-7	-0.25
2		-8	

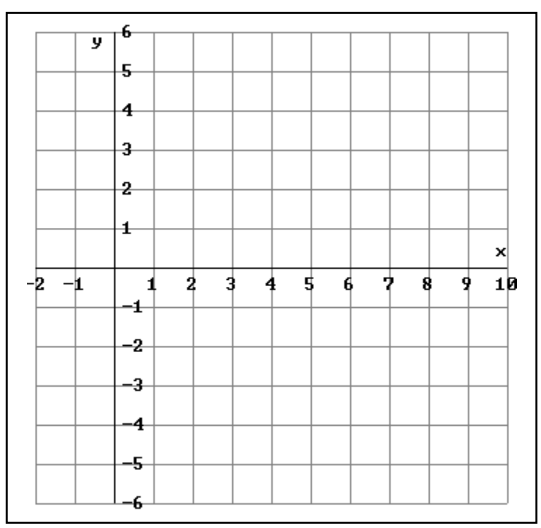
Si te das cuenta se recorrió a la izquierda 3 unidades, pasó lo mismo que cuando lo hicimos para las funciones polinomiales, si a la variable x le sumamos una cantidad la gráfica se recorre a la izquierda las unidades que le sumamos. Ahora la asíntota vertical también se recorre, ya no es el eje Y cuya ecuación es $x = 0$ ahora la asíntota vertical es la recta de ecuación $x = -3$,
la asíntota horizontal sigue siendo la misma, el eje X cuya ecuación es $y = 0$.
El dominio y el rango son: D = $\{x \in R \,/\, x \neq -3\}$, Rango = $\{y \in R \mid y \neq 0\}$

Si le restamos cierta cantidad a x se debe ahora recorrer a la derecha, hagámoslo.

Actividad 2) Encuentra el dominio y el rango de $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{x-5}$, traza su gráfica y las asíntotas.

Solución.-
Para el dominio se debe quitar los ceros del denominador:
Como $x - 5 = 0$ cuando $x = 5$, entonces el dominio lo forman todos los números reales menos el 5, D = ______________________, así que vamos a evaluar alrededor del 5, como en la tabla y luego localizamos los puntos sobre el plano

x	G(x)=1/(x-5)	x	G(x)=1/(x-5)
4.8	-5	5.2	5
4.6	-2.5	5.4	
4.4		5.6	1.6666667
4.2	-1.25	5.8	1.25
4		6	1
3.5		6.5	0.6666667
3	-0.5	7	
2.5		7.5	0.4
2		8	0.3333333



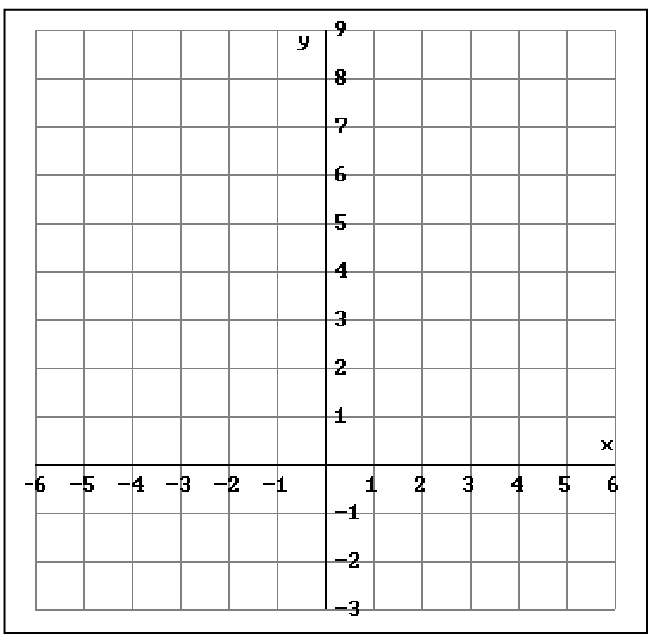
Sucedió lo que se esperaba la gráfica se recorrió hacia la derecha 5 unidades.
La asíntota vertical ahora es la recta de ecuación $x = 5$,
La asíntota horizontal es la recta de ecuación ____________
El rango esta formado por todos los números reales menos el cero,
Rango = ___________________________

> **Nota para el profesor:** Hay que enfatizar que el recorrido es sobre el eje X, si le sumamos una cantidad a x la gráfica se recorre a la izquierda y si se la restamos se recorre a la derecha. La asíntota vertical también se recorre por lo que el dominio cambia, el rango permanece igual y cruza al eje Y, ya que x si puede tomar el valor de cero.

Si a $\frac{1}{x}$ le sumamos o le restamos una cantidad, ya podrías decir que es lo que pasa y sino realicemos los siguientes ejemplos.

Actividad 3) Traza la gráfica de F(x) = $\frac{1}{x}$ + 3, y da su dominio y su rango

Solución.-
Su dominio esta formado por todos los reales menos el cero,
D = ______________________, así que evalúa alrededor del cero, traza la gráfica así como sus asíntotas.



x	$F(x) = \frac{1}{x} + 3$
0.2	
0.4	5.5
0.8	
1	4
2	3.5
3	
-0.2	-2
-0.4	0.5
0.8	1.75
0.1	13
-2	2.5
-3	

La gráfica se desplazo ahora sobre el eje Y, 3 unidades hacia arriba, la que cambio fue la asíntota horizontal que ahora es la recta de ecuación $\underline{y = 3}$,
La asíntota vertical es la recta de ecuación __________
su rango es: Rango = ________________________.

La gráfica de esta función si cruza el eje X, así que la función F tiene un cero en ________________.

Si a la función F en lugar de sumarle 3 le restamos 6, la gráfica debe bajar 6 unidades, puedes hacerlo como un nuevo ejercicio.

Nota para el profesor: Hay que hacer ver que ahora el desplazamiento es sobre el eje Y, que si a $1/x$ le sumamos una cantidad la gráfica sube pero si se le resta la gráfica baja, por lo que la asíntota horizontal sube o baja las unidades dadas, el rango cambia y el dominio permanece igual (todos los reales menos el cero). Ahora si cruza al eje X por lo tanto tiene un cero

Actividad 4) Graficar F(x) = $\dfrac{1}{2x+1}$

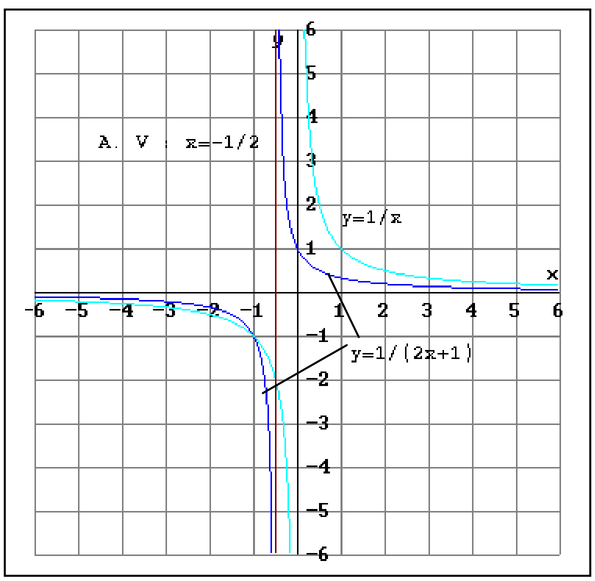
Solución.-

Sabemos que se tiene que quitar del dominio el cero del denominador, entonces resolvemos la ecuación $2x + 1 = 0$, $x = -1/2$, así que podemos evaluar alrededor de $x = -1/2$; otra forma es factorizar el 2 en la ecuación y quedaría como:

$2x + 1 = 2(x + ½)$ y ahora analicemos F(x) = $\dfrac{1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$;

Como a x le sumamos ½ la función $\dfrac{1}{x}$ se debe recorrer ½ hacia la izquierda, esta multiplicada por ½ entonces cada punto recorrido debe disminuir a la mitad, se pega más rápido a las asíntotas, que son: la vertical $\underline{x = -1/2}$ y la horizontal $\underline{y = 0}$, sino estas seguro has la tabla dándole valores a x alrededor de –1/2.

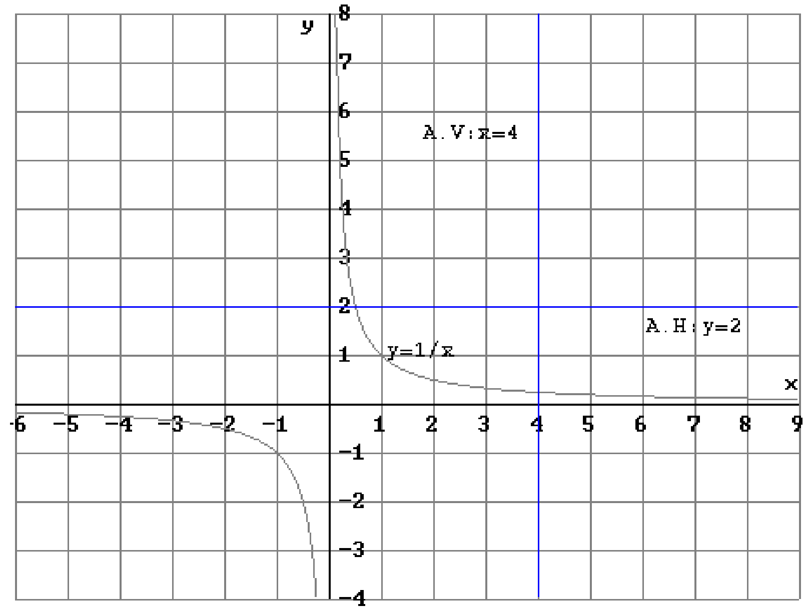
Su dominio y rango son: D = ________________, Rango = ______________



Actividad 5) Ahora tracemos la gráfica de F(x) = $\frac{1}{x-4}+2$

Solución.-

Con respecto a la gráfica de $\frac{1}{x}$, el –4 hace que la gráfica se recorra 4 unidades a derecha, y el 2 la va a subir 2 unidades entonces la asíntota vertical es $\underline{x = 4}$ y la horizontal $\underline{y = 2}$, traza la gráfica de F



Su dominio y rango son: D = ___________________, Rango = _______________
Cruza al eje Y en __________________
Cruza al eje X en ____________ (resuelve la ecuación cuando F es igual a cero)
por lo tanto x = ______ es un cero de la función F

Ejercicio 2.3.1

En base a los ejemplos anteriores traza las gráficas de las siguientes funciones, da el dominio y el rango de cada una de ellas, así como también escribe las ecuaciones de sus asíntotas y encuentra los ceros si es que tienen.

1) F(x) = $\frac{1}{x-3}$	2) G(x) = $\frac{1}{x+4}$	3) H(x) = $\frac{1}{x}+4$	4) I(x) = $\frac{1}{x}-3$
5) F(x) = $\frac{1}{4x}$	6) F(x) = $\frac{3}{(x-5)}$	7) G(x) = $-\frac{1}{x}-4$	8) G(x) = $\frac{1}{3x-2}$
9) H(x) = $\frac{-5}{(x-2)}$	10)H(x) = $\frac{3}{(x-1)}+5$	11) J(x) = $\frac{-1}{x}+5$	12) F(x) = $-\frac{2}{x}+3$
13) K(x) = $-\frac{5}{(x+1)}$	14)R(x) = $-\frac{1}{(x+3)}-2$	15) S(x) = $\frac{2}{3x+5}-3$	16) T(x) = $-\frac{3}{3x-7}+4$

17) $U(x)=\dfrac{2}{x-2}$ 18) $M(x)=\dfrac{2}{2-x}$ 19) $N(x)=\dfrac{10}{x-4}$ 20) $P(x)=\dfrac{-5}{x+8}$

21) $f(x)=\dfrac{15}{5-x}$ 22) $g(x)=\dfrac{-12}{6+x}$ 23) $R(x)=-3+\dfrac{4}{6-2x}$ 24) $S(x)=5-\dfrac{1}{8-4x}$

EN LAS SIGUIENTES PÁGINAS SE ENCUENTRA UN BREVE RESUMEN DEL COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE LAS FUNCIONES ANTERIORES:
http://www.vitutor.com/fun/2/c_8.html
http://www.vitutor.com/fun/2/c_9.html

2.3.2 Funciones de la forma $f(x)=\dfrac{a}{(x+b)^2}+c$

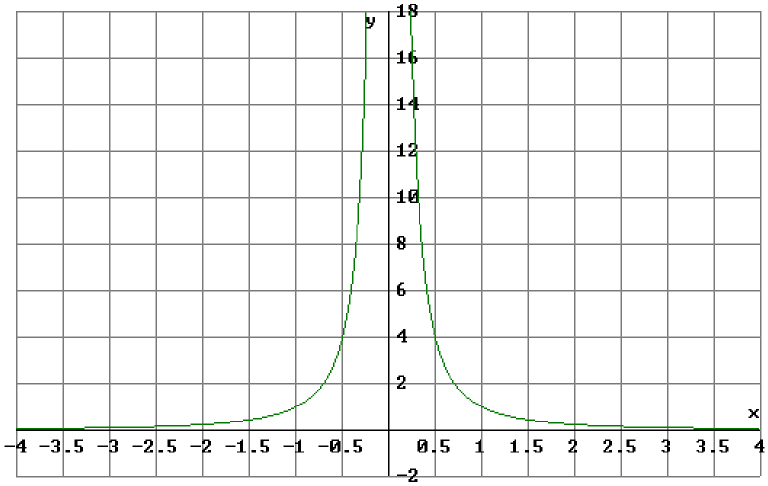
La función más sencilla de este tipo es: $\dfrac{1}{x^2}$, así que hay que empezar por hacer un análisis de esta.
El denominador nunca puede ser cero y para valores positivos o negativos de x, al elevarlos al cuadrado siempre son positivos e dominio y el rango son:

D_f = {x / x es un numero, distinto de cero} = {x / x ε R y $x \neq 0$}
R_f = {y / y es un número real y es positivo} = {y / y ε R y $y > 0$}

Si x toma valores muy pequeños en magnitud tanto positivos o negativos (nos acercamos al cero por la derecha o por la izquierda) los valores de la función crecen y la gráfica se acerca al eje Y positivo por lo tanto éste es una asíntota vertical ($x = 0$).

Ahora si x toma valores muy grandes en magnitud tanto positivos como negativos, la función toma valores positivos que se acercan a cero, la gráfica se acerca al eje X pero no lo toca, por lo que el eje X es una asíntota horizontal, ($y = 0$).
Completando la tabla con ayuda de los alumnos, se localizan los puntos en el plano y se obtiene la forma de la gráfica.

x	F(x) = 1/x^2	x	F(x) = 1/x^2
0.01		-0.01	
0.1		-0.1	
0.2	25	-0.2	25
0.4	6.25	-0.4	6.25
0.5	4	-0.5	4
0.6	2.7778	-0.6	2.7778
0.8	1.5625	-0.8	1.5625
1	1	1	1
1.5	0.4444	-1.5	0.4444
2	0.25	-2	0.25
2.5	0.16	-2.5	0.16
3	0.1111	-3	0.1111
10		-10	
-100		-100	



Se puede seguir con el siguiente ejemplo cambiando el valor de a.

Ejemplo 1: Encontrar el dominio, el rango, las raíces, los puntos de ruptura, las asíntotas y la gráfica de la función $f(x)=\frac{10}{x^2}$.

Solución:
El dominio de la función son todos los números reales menos los valores de x, donde la función del denominador es cero, dicho valor es $x = 0$.
El domino es el conjunto:

$D_f = \{x / x$ es un numero, distinto de cero$\} = \{x / x \in R$ y $x \neq 0\}$

Para el rango tenemos que ver el comportamiento de la función cuando el valor de x se acerca a cero con valores mayores que cero y con valores menores que cero.

x	4	3	2	1	0.5	0.4	0.2	0.1
$f(x)$	0.625	1.111	2.5	10	40	62.5	250	1000
x	-4	-3	-2	-1	-0.5	-0.4	-0.2	-0.1
$f(x)$	0.625	1.111	2.5	10	40	62.5	250	1000

En ambos casos los valores de la función se hacen cada vez más grandes.
$x = 0$ es un punto de ruptura de la función y además el eje de las ordenadas es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función.

Ahora veamos el comportamiento de la función cuando los valores de x se alejan de cero hacia la derecha (positivos) o hacia la izquierda (negativos)

x	5	10	20	30	40	50	60	100
$f(x)$	0.4	0.1	0.025	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001

Los valores de la función se acercan a cero, y son positivos.

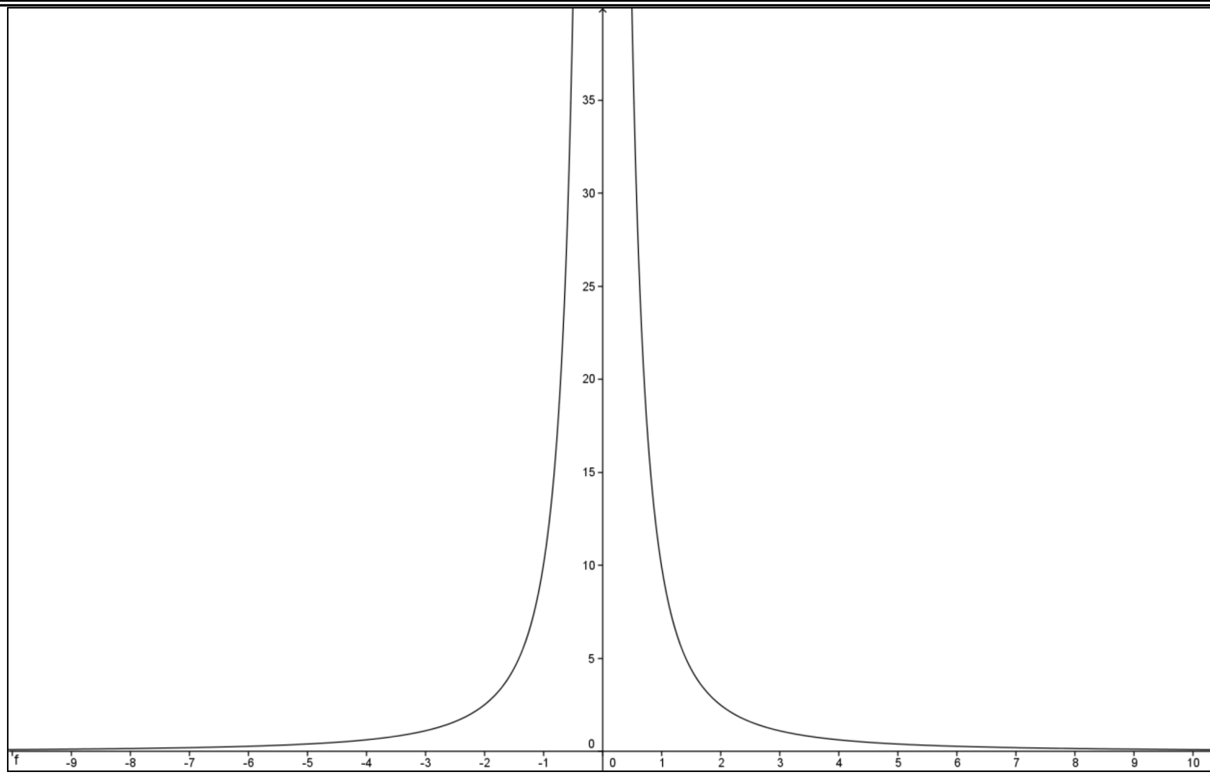
x	-5	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-100
$f(x)$	0.4	0.1	0.025	0.011	0.006	0.004	0.002	0.001

Sucede lo mismo.

De lo anterior tenemos que el eje de las abscisas es otra **asíntota** pero ahora **horizontal** de la gráfica de la función.

La función no tiene raíces, ya que para que $f(x) = 0$, se debe cumplir que $\frac{10}{x^2} = 0$, de donde se debe tener que 10 = 0, lo cual es imposible. **Las raíces de una función racional son las raíces de la función polinomial del numerador.**

La gráfica de la función, sus asíntotas y el punto de ruptura $x = 0$, se muestran a continuación.



Como para cada valor de x en el dominio de la función, el valor de la función es mayor que cero, el rango de la función son todos los números reales positivos,

R_f = { y / y es un número real y es positivo } = { y / y ε R y $y > 0$ }

Observaciones:

- Las funciones que se han estudiado hasta el momento son funciones racionales, que son el cociente de dos funciones polinomiales.

  $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, con h($x$) ≠ 0.
- En todos los casos g(x) = k, con k una constante, que corresponde en cada caso con el término independiente de una función polinomial. Y h(x) en algunos casos fue h(x) = x, la función identidad, y en otros casos h(x) = x^2, la función cuadrática.
- Para toda función racional el dominio será el conjunto de los números reales menos los valores de x en donde la función del denominador es cero, los valores de los puntos de ruptura se quitan del dominio.
- En los puntos de ruptura las funciones racionales tienen asíntotas

Las siguientes actividades son para analizar el comportamiento de la gráfica de este tipo de funciones cuando se cambian los diferentes parámetros, se pueden utilizar para trabajar en clase o dejar de tarea, para obtener conclusiones conjuntamente con el grupo.

Actividad 1) Encuentra el dominio, el rango y las ecuaciones de las asíntotas de cada una de las funciones, y da las intersecciones con los ejes

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+3$ b) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}-2$

Solución.-

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+3$, quitamos x = 0 ya que no se vale la división entre cero, entonces su dominio es: D = ___________________________

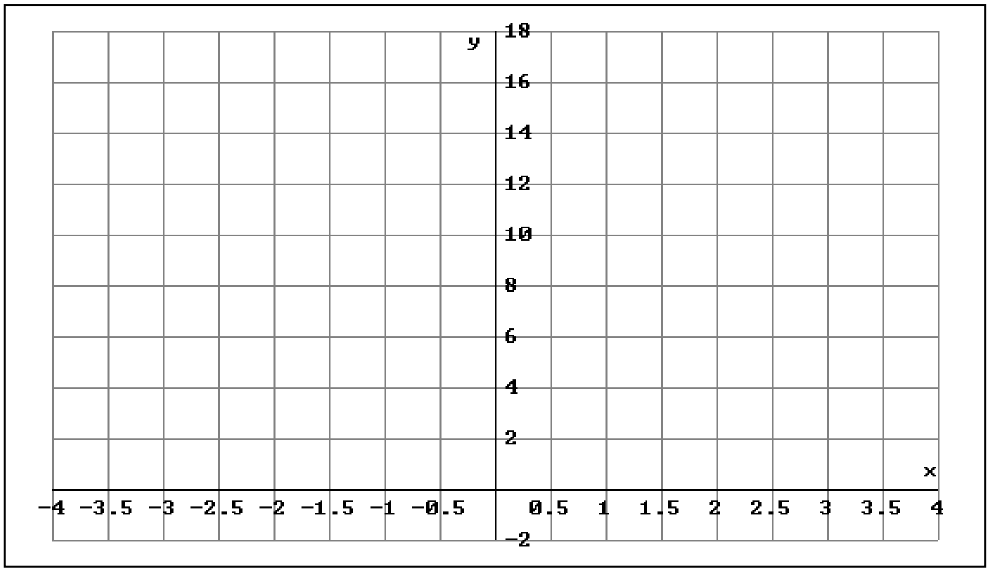
La asíntota vertical tiene ecuación ______________

Como le sumamos 3 a la función original ($1/x^2$), todos los valores van aumentar 3 unidades, así que la gráfica va a subir ______ unidades

La asíntota horizontal tiene ecuación ____________

El rango de f es: Rango = _____________________

Nunca cruza el eje X, no tiene ceros reales y tampoco cruza al eje Y, ya que este es la asíntota vertical.



b) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}-2$ su dominio es: D = _______________________

La asíntota vertical tiene ecuación ___________

Ahora le restamos 2 a la función original. Todos los valores de g van a disminuir 2 unidades, entonces la gráfica va a _______ ______ unidades.

La asíntota horizontal tiene ecuación ____________

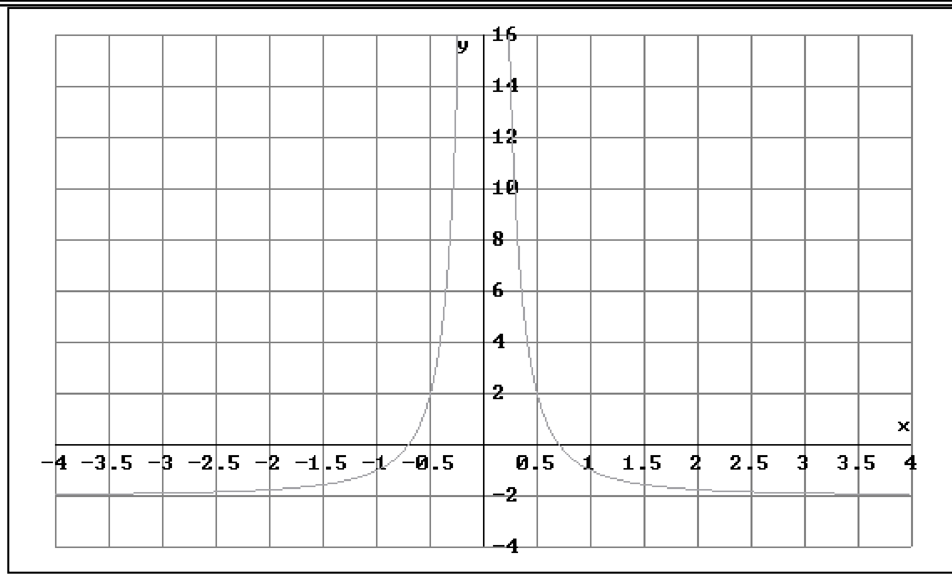
El rango de g es: Rango = $\{\, y \in \mathrm{R} \mid y > -2 \}$

Al resolver la ecuación $\dfrac{1}{x^2}-2=0$ encontramos los ceros de la función que son:

x = ___________ y x = _________, estos son los puntos donde cruza al eje X

Al eje Y nunca lo cruza.

Marca bien la gráfica verificando con algunos puntos.



Actividad 2) Encuentra el dominio, el rango y las ecuaciones de las asíntotas de cada una de las funciones, y da las intersecciones con los ejes

a) $F(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$ b) $G(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

Solución:

a) $F(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$, El denominador no puede ser cero y esto sucede cuando ____________, así que su dominio es: D =______________________

La asíntota vertical tiene ecuación _________

Ahora a x se le está sumando 3, así que se va a recorrer hacia la ____________

Y va a quedar sobre el eje X por lo tanto el rango es: Rango = ________________

La asíntota horizontal tiene ecuación ___________

No cruza al eje X pero sí al eje Y en ___________

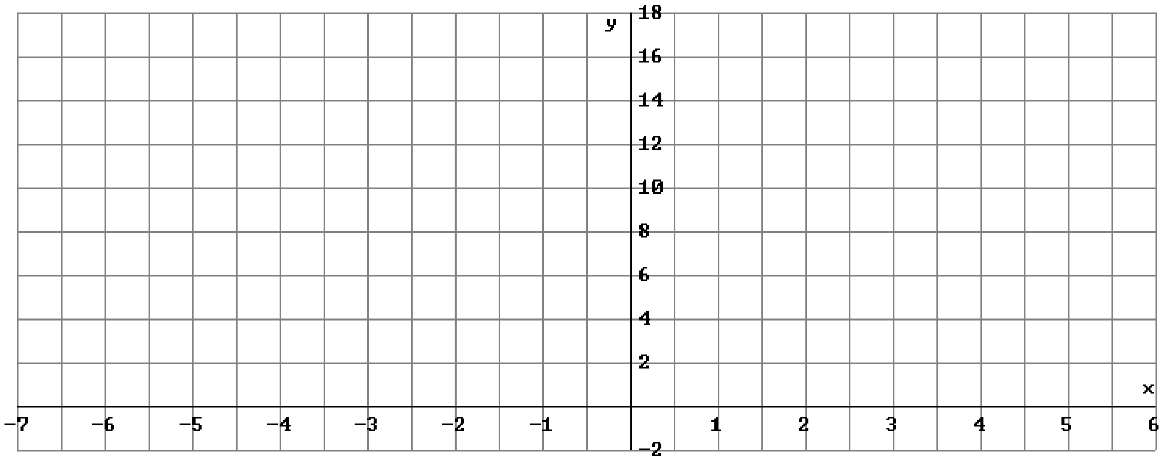
b) $G(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$, el denominador se hace cero cuando ___________, el dominio de G es: D = _________________; la ecuación de la asíntota vertical es: __________

Como a x se le esta restando 2 ahora se recorre hacia la _________________ y sigue quedando sobre el eje X, por lo que el rango es: R = ___________________

La asíntota horizontal tiene ecuación ____________

No cruza al aje X pero sí al eje Y en ___________

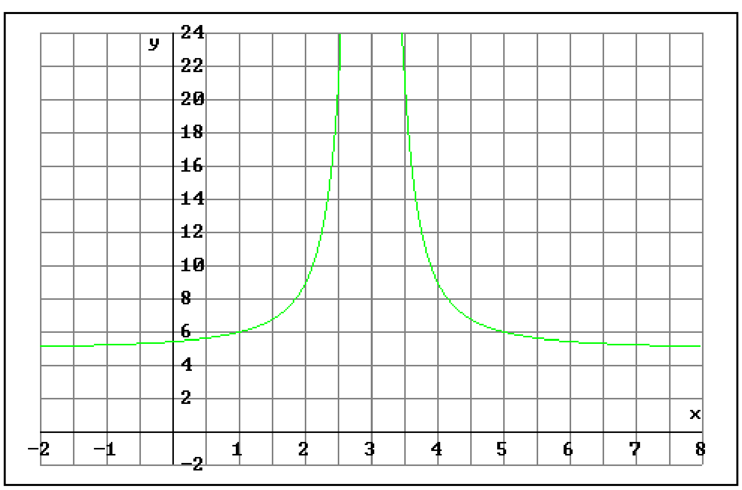
Traza las gráficas en el siguiente plano



Actividad 3) Traza la gráfica de $Q(x)=\dfrac{4}{(x-3)^2}+5$, encuentra su dominio, rango, las ecuaciones de las asíntotas y los puntos donde cruza a los ejes.

Solución:
A x se le esta restando 3 por lo tanto se va a recorrer hacia la ______________
La asíntota vertical tiene ecuación ____________
El dominio de la función es: D = ___________________
El cuatro esta multiplicando a la función original, esto nos da un alargamiento vertical, cuando el valor de la original es 1 con el alargamiento va a tomar el valor de 4
El 5 se le esta sumando a la función, así que sube ______ unidades
La ecuación de la asíntota horizontal es _________
Cruza al eje Y en ___________ y no cruza el eje X, ya que queda arriba de la recta $y = 5$
Traza las asíntotas y verifica con algunos puntos, remarca la gráfica de $Q(x)$

(Sobre la gráfica original se encuentra el punto (1, 1), el valor de y es 1 así que lo multiplicamos por 4 y llegamos a (1, 4), lo recorremos 3 unidades a la derecha y nos queda el punto (4, 4), lo subimos 5 unidades y llegamos a (1, 9) que se encuentra sobre la gráfica)



Ejercicios 2.3.2) traza en tu cuaderno las gráficas de las siguientes funciones y analízalas junto con tus compañeros.

1) $f(x)=\frac{5}{x^2}$ 2) $f(x)=-\frac{10}{x^2}$ 3) $f(x)=\frac{0.5}{x^2}$ 4) $f(x)=-\frac{0.4}{x^2}$

5) $\text{f(x)}=\frac{2}{\text{x}^2}$ 6) $\text{f(x)}=-\frac{4}{\text{x}^2}$ 7) $f(x)=\frac{1}{x^2}+5$ 8) $f(x)=-\frac{1}{x^2}+3$

9) $f(x)=\frac{1}{x^2}-2$ 10) $f(x)=\frac{1}{(x+4)^2}-5$ 11) $g(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$ 12) $h(x)=\frac{3}{(x+1)^2}+10$

13) $k(x)=\frac{-2}{(x+5)^2}-5$ 14) $m(x)=\frac{10}{(x-7)^2}+2$ 15) $q(x)=\frac{6}{(x-4)^2}-8$

OBSERVACIÓN: En las funciones anteriores el denominador es una función cuadrática que al igualarla a cero nos da una raíz doble, por eso solamente tenemos una asíntota vertical. En la siguiente sección vamos analizar que pasa cuando el denominador tiene dos ceros que provienen de raíces diferentes.

2.3.3 Funciones de la forma $f(x)=\frac{d}{ax^2+bx+c}$

Se sugiere trabajar conjuntamente con el alumno, realizando los siguientes ejemplos o haciéndolo con funciones similares, para que vea las diferencias del comportamiento de la gráfica cuando el denominador tiene raíces diferentes o raíces complejas.

Ejemplo 1) Analiza la función $f(x)=\frac{1}{x^2+3x}$ y traza su gráfica.

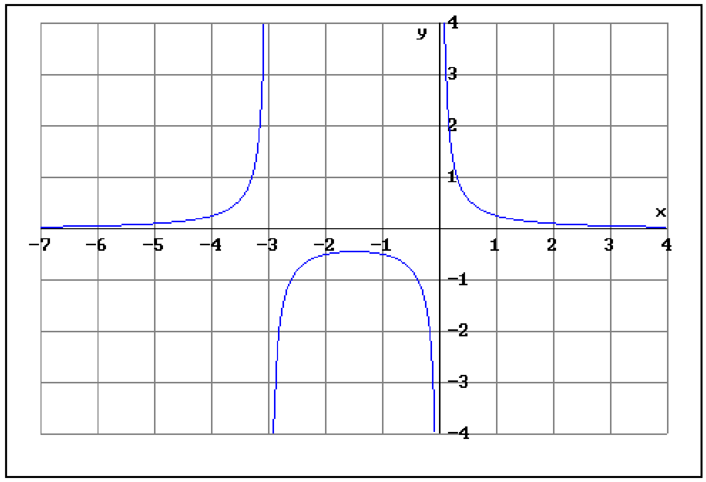
Solución:
Igualamos el denominador a cero y encontramos las raíces de la ecuación
$x^2+3x=0$, factorizando, $x(x+3)=0$, las raíces son: x =_____ y x = _____
El dominio de la función es: D = ____________________________
Tiene dos asíntotas verticales y sus ecuaciones son: _________ y _________
Así que tenemos 3 regiones de – ∞ a – 3 o sea el intervalo _____________
De – 3 a 0, el intervalo ___________ y de 0 a ∞, el intervalo ____________
Evaluemos en algunos puntos de estos intervalos

(– ∞, – 3)	(– 3, 0)	(0, ∞)
f(–3.1) =	f (–2.9)=	f(0.1)=
f (–4) =	f (–2)=	f 0.5)=
f(–6) =	f(–1.5)=	f (1)=
f(–10)=	f(–1)=	f(10)=
f(–100)=	f(–0.2)=	f (100)=

Conforme x se aleja a la izquierda de –3 la función toma valores muy pequeños, pero no cruza el eje X y cuando x se aleja a la derecha de 0 de nuevo la función toma valores muy pequeños pero no cruza el eje X, así que el eje X es una asíntota horizontal y tiene ecuación ___________

En la región de en medio es negativa y las dos ramas se extienden hacia abajo,

Localiza los puntos sobre la gráfica y marca las asíntotas. En la región de en medio la curva es simétrica y el valor máximo de f se encuentra a la mitad del intervalo x =–1.5, por lo que el rango de la función esta formado por todos los reales menos el intervalo (–0.444, 0], o y esta en la unión de dos intervalos $y \in (-\infty, -4/9] \cup (0, \infty)$



No cruza al eje X, ni al eje Y.

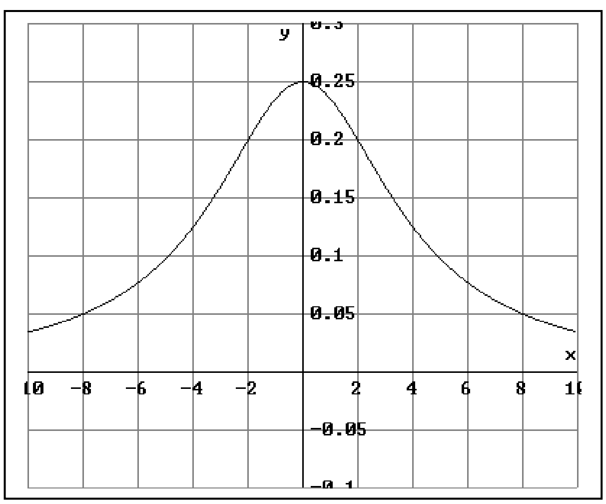
Ejemplo 2) Traza la gráfica de $g(x) = \dfrac{4}{x^2 + 16}$ y analízala

Solución:

Igualamos el denominador a cero para tener el dominio y además las asíntotas verticales, $x^2 + 16 = 0$, $x^2 = -16$, x = _________, las raíces no son reales

Por lo tanto el dominio de la función son todos los números reales,

No tiene asíntota vertical; evalúa en algunos puntos y localízalos sobre la curva ya dada



Es simétrica con respecto al eje Y, así que su eje de simetría tiene ecuación _____

La asíntota horizontal tiene ecuación ______________

El rango es: R = __________________

Ejercicio 2.3.3) Traza en tu cuaderno las siguientes funciones y analízalas.

1) H(x) = $\dfrac{1}{x^2 - 4}$ 2) F(x) = $\dfrac{1}{x^2 - 8x}$ 3) R(x) = $\dfrac{1}{x^2 + 1}$

4) $G(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 12}$ 5) $M(x) = -\dfrac{2}{x^2 + 1}$ 6) $N(x) = \dfrac{4}{-x^2 + 6x - 8}$

7) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 3x - 10}$ 8) $g(x) = \dfrac{6}{x^2 - 4x + 8}$ 9) $h(x) = \dfrac{-1}{x^2 + 5x - 15}$

Nota para el profesor: Debe quedar claro que si la función del denominador tiene ceros complejos el dominio son todos los números reales y no hay asíntota vertical, mientras que si la función del denominador tiene ceros reales, el dominio son los números reales menos estos valores y ahora se tienen dos asíntotas verticales que dividen al plano en tres regiones.

2.3.4 Funciones de la forma $f(x) = \dfrac{\textit{funcion lineal}}{\textit{funcion lineal}}$

Se puede empezar por realizar un ejemplo como el siguiente y después dejar que los alumnos interactúen con las actividades donde se tienen algunos otros ejemplos para que se vayan dando cuenta del comportamiento en general de las funciones de este tipo.

Ejemplo 1) Encuentra el dominio, el rango, los puntos de ruptura, las raíces, las asíntotas y la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x+3}{6-x}$.

Solución:

Raíces de la función, las raíces se obtienen igualando a cero la expresión del numerador y se resuelve la ecuación que resulta.

$x + 3 = 0$, de donde $x = -3$, la función f(x) se hace cero en $x = -3$, su gráfica cruza el eje X en este punto.

Cruza al eje Y cuando x = 0, f(0) = 3/6= 1/2

Puntos de ruptura, son las raíces del denominador de la función.

$6 - x = 0$, de donde $x = 6$, la función tiene un punto de ruptura en $x = 6$.

Dominio de la función, Son todos los números reales menos los valores que toma x en los puntos de ruptura de la función.

D_f = {x / x es un número real distinto de 6} = {x / x ε R y x ≠ 6}

Comportamiento de la función primero se encuentran los valores de la función cuando los valores de x se acercan al punto de ruptura x = 6, con valores mayores y con valores menores.

Valores mayores que 6.

x	7	6.8	6.6	6.5	6.4	6.2	6.1	6.01
f(x)	–10	–12.25	–16	–19	–23.5	–46	–91	–901

Los valores de la función se hacen cada vez más grandes en magnitud pero con signo negativo.

Valores menores que 6.

x	5	5.2	5.4	5.5	5.6	5.8	5.9	5.99
f(x)	8	10.25	14	17	21.5	44	89	899

Los valores de la función se hacen cada vez más grandes ahora con signo positivo.

Valores que se alejan de 6 por la derecha

x	10	15	20	25	30	50	100	500
f(x)	–3.25	–2	–1.64	–1.47	–1.37	–1.2	–1.09	–1.01

Los valores de la función se acercan al valor de –1 por abajo.

Valores que se alejan de 6 por la izquierda.

x	2	–3	–8	–13	–18	–36	–88	–488
f(x)	1.25	0	–0.35	–0.52	–0.62	–0.78	–0.90	–0.98

Los valores de la función se acercan al valor de –1 por arriba.

Asíntotas, la función tiene una asíntota vertical que pasa por el punto de ruptura y su ecuación es $\boldsymbol{x = 6}$, y tiene otra asíntota horizontal cuya ecuación es $\boldsymbol{y = -1}$, ya que los valores de la función se acercan al valor de –1 cuando los valores de x se alejan hacia ambos lados del punto de ruptura.

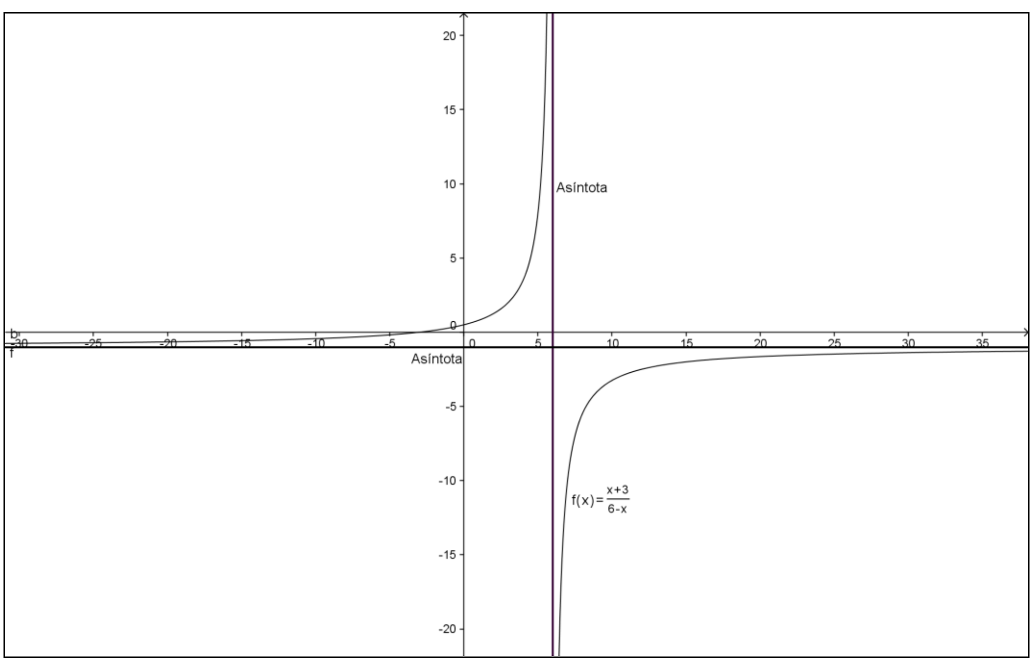
Si hacemos la división indicada en la función $\frac{x+3}{6-x} = -1 + \frac{9}{6-x}$, donde –1 es el cociente y 9 es el residuo, y la ecuación de la asíntota es y = –1.

NOTA: Si el grado de las funciones polinomiales del numerador y el denominador de una función racional es el mismo, al hacer la división, la ecuación de la asíntota horizontal es y = constante (cociente de la división).

Rango de la función, El rango de la función son todos los números reales menos el valor que corresponde al valor de y =–1 por donde pasa la asíntota horizontal.

$R_f = \{y \,/\, y$ es un número real distinto de $-1\} = \{y \,/\, y \in R$ y $y \neq -1\}$

La gráfica de la función se muestra a continuación.

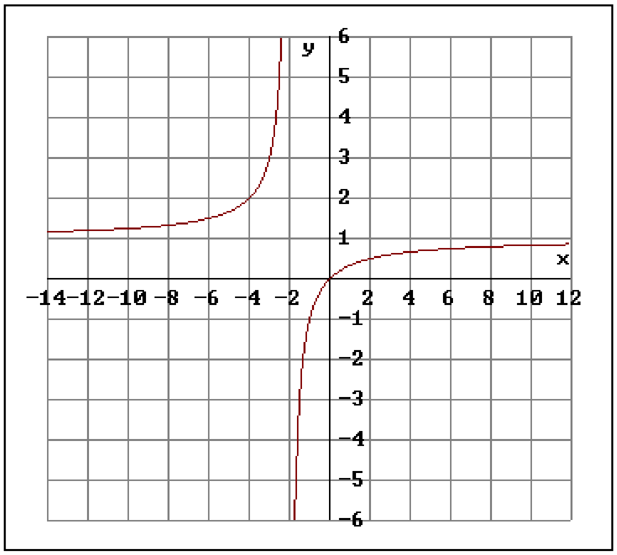


Los siguientes ejemplos los pueden analizar los alumnos en clase para reforzar el estudio de funciones de este tipo.

Actividad 1) Traza la gráfica de la función F(x) = $\frac{x}{x+2}$ y analízala.

Solución:
El dominio de esta función esta formado por todos los números reales menos los ceros del denominador ($x + 2 = 0$, $x = –2$) y el denominador se hace 0 cuando x = –2, el dominio es: D= ____________________, x = –2 es una asíntota _____________, así que empecemos por evaluar alrededor de –2, localiza los puntos sobre la gráfica y marca las asíntotas

x	$x/(x+2)$	x	$x/(x+2)$
-1.8	-9	-2.2	11
-1.5	-3	-2.5	5
-1.3	-1.857	-2.8	3.5
1	0.333	-3	3
2	0.5	-4	2
3	0.6	-5	1.667
4	0.667	-6	1.5
5	0.714	-7	1.4
6	0.75	-8	1.333
10	0.333	-10	1.25
50	0.962	-50	1.042
100	0.980	-100	1.020



Si te das cuenta cuando le damos un valor a x muy grande (a la derecha de –2) el valor de la función se acerca a 1 por abajo y si le damos a x un número muy grande en magnitud pero negativo (a la izquierda de –2) se acerca a 1 por arriba, por lo que podemos decir que y = 1 es una asíntota horizontal.

Con lo anterior nos damos cuenta de que el rango de la función son todos los números reales menos el 1, Rango = _____________________
Cruza al eje X y al eje Y en el origen, pasa por (0, 0)

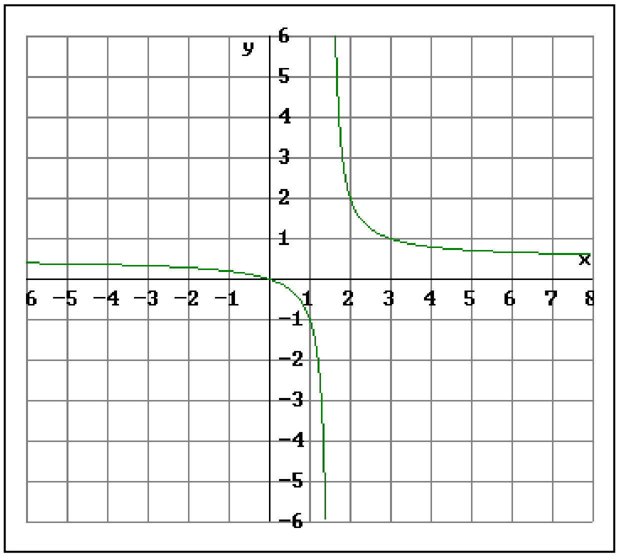
Sigamos haciendo ejemplos para que te puedas dar cuenta que pasa con la asíntota horizontal.

Actividad 2) Analiza la función $G(x) = \frac{x}{2x-3}$ y traza su gráfica.

Primero encontramos los ceros del denominador que en este caso es 3/2 ya que,

$2x – 3 = 0$, $2x = 3$, $x = 3/2$, así que el dominio es: D = ________________

Nuevamente evaluemos la función alrededor de 1.5 y tracemos su gráfica y las asíntotas



x	$G(x)$	x	$G(x)$
1.7	4.25	1.3	-3.25
2	2	1	-1
3	1	0	0
4	0.8	-1	0.2
5	0.714	-2	0.286
6	0.667	-3	0.333
10	0.588	-10	0.435
50	0.515	-50	0.485
100	0.508	-100	0.493

Si observas tanto la tabla como la gráfica te puedas dar cuenta que cuando nos alejamos a la derecha de 1.5, o sea, cuando le damos valores a x muy grandes el valor de la función se acerca a 0.5 = ½ por arriba, y si nos alejamos a la izquierda de 1.5, o sea, x negativa también se acerca a 1.5 pero ahora por abajo, así que la asíntota horizontal es y = ½, el rango es: Rango = ______________________

Si analizas lo anterior, podrás ver que para la asíntota horizontal en el primer ejemplo teníamos que era y = 1 y vemos que en el numerador, el coeficiente de x es 1 y en el denominador el coeficiente de x es 1, así que 1/1 nos da 1. Ahora en el segundo ejemplo resulto que la asíntota horizontal es y = ½ y de nuevo el coeficiente de x en el numerador es 1 y el coeficiente de x en el denominador es 2, por lo que la función tiende a acercarse a ½ cuando la x se aleja del punto de ruptura.

Ejercicios 2.3.4) Analiza las siguientes funciones y traza su gráfica

1) $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$	5) $f(x)=\frac{x-5}{x+4}$	9) $f(x)=\frac{x}{x+3}$
2) $f(x)=\frac{x-5}{x}$	6) $f(x)=\frac{4-x}{x-3}$	10) $f(x)=\frac{2x-4}{x+8}$
3) $F(x) = \frac{x}{3x-2}$	7) $F(x) = \frac{5-2x}{2x+7}$	11) $G(x) = \frac{5x}{x-1}$
4) $F(x) = \frac{4x+8}{3x-4}$	8) $H(x) = \frac{3x}{x+5}$	12) $J(x) = \frac{4-2x}{x+3}$

2.3.5 Funciones de la forma $f(x) = \dfrac{\text{funcion lineal}}{\text{funcion cuadratica}}$

Se puede continuar realizando los siguientes ejemplos de tal forma en que los alumnos tengan una mayor participación para que así puedan ir descubriendo los cambios en las formas de las gráficas de estas funciones y así se pueda avanzar.

Ejemplo 1) Traza un bosquejo de la gráfica de la función $G(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-10}$

Solución:

Igualamos a cero la expresión del denominador para localizar las raíces y quitarlas del dominio $x^2 - 3x - 10 = 0$, $(x - 5)(x + 2) = 0$, soluciones: $x = 5$ y $x=-2$

El dominio de la función es D = ____________________________

Las asíntotas verticales son: ___________ y ___________

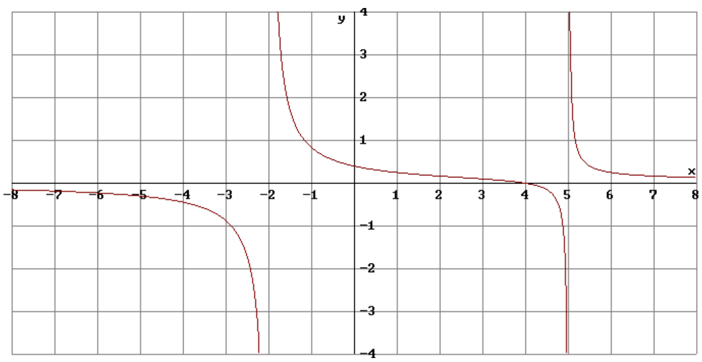
Si igualamos a cero la expresión del numerador tenemos los ceros de la función G o sea donde cruza ____________ y lo hace en __________

Al eje Y lo cruza en $G(0)$ = __________

Tenemos tres regiones formadas por los intervalos ________, _______y _______

Ahora evaluemos en algunos puntos dentro de estos intervalos

( )	( )	( )
G(-8)=	G(-1.8)=	G(5.1)=
G(-6)=	G(-1)=	G(5.5)=
G(-4) =	G(1)=	G(5)=
G(-3)=	G(3)=	G(6)=
G(-3.5)=	G(4.5)=	G(7)=
G(-3.2)=	G(4.8)=	G(8)=



Marca los puntos sobre la gráfica, así como las asíntotas

La asíntota horizontal tiene ecuación: __________

El rango de la función G es: Rango = ______________________

> **NOTA PARA EL PROFESOR:** es importante hacer notar que la gráfica de una función si puede cruzar una asíntota horizontal, las que no se pueden cruzar son las asíntotas verticales

Ejemplo 2) Traza un bosquejo de la gráfica de la función $H(x)=\dfrac{2x}{4+x^2}$

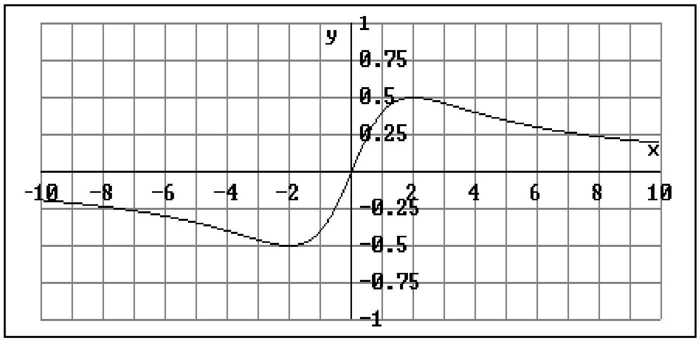
Solución:

Igualamos el denominador a cero para encontrar los ceros que hay que quitar del dominio, $4+ x^2 = 0$, $x^2 =-4$, no tiene raíces reales

El dominio es: D = _________________

No tiene asíntotas _____________, cruza al eje X en ______ y al eje Y en ______

Completa la tabla y marca los puntos sobre la gráfica.



H(-1) =	H(1) =
H(-2) =	H(2) =
H(-3) =	H(3) =
H(-4) =	H(4) =
H(-5) =	H(5) =
H(-7) =	H(7) =
H(-10)	H(10 =
H(-100)	H(100) =

La asíntota horizontal es __________

El rango de la función H es: Rango = _________________

A veces no es tan fácil determinar el rango de una función pero puedes dar una aproximación de acuerdo a la gráfica.

NOTA PARA EL PROFESOR: Hacer ver a los alumnos que pueden dar el contradominio de la función ya que este contiene al rango

PARA EJEMPLOS DONDE HAY HUECOS EN LA GRÁFICA (COINCIDEN LOS CEROS DE LAS DOS FUNCIONES) SE PUEDE VER EL SIGUIENTE VIDEO: http://www.youtube.com/watch?v=95lu9CnSnAM&feature=related

Ejercicios 2.3.5) Traza un bosquejo de las siguientes funciones y analízalas, escribe todas tus observaciones.

1) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-8x+5}$ 2) $g(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+5x-24}$ 3) $h(x)=\dfrac{x-2}{x^2-11x+24}$

4) $p(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+10x+30}$ 5) $q(x)=\dfrac{5x-8}{2x^2+5x+8}$ 6) $r(x)=\dfrac{x-10}{x^2+4}$

7) $s(x)=\dfrac{4x+3}{x^2+6x+8}$ 8) $t(x)=\dfrac{3x-8}{2x^2-4x-16}$ 9) $u(x)=\dfrac{x+2}{16-x^2}$

PARA REAFIRMAR ELCONCEPTO DE DOMINIO DE UNA FUNCIÓN SE PUEDE SUGERIR A LOS ALUMNOS EL SIGUIENTE VIDEO: http://www.youtube.com/watch?v=qOCMPXoxJyg&feature=related

2.3.6 Funciones de la forma $f(x)=\dfrac{funcion\ \ cuadratica}{funcion\ \ cuadratica}$

El profesor puede usar los ejemplos 1 y 2 y desarrollarlos en forma más detallada y dejar los otros para que el alumno trabaje.

Ejemplo 11: Encuentra el dominio, el rango, los puntos de ruptura, las raíces, las asíntotas y la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$.

Solución:

Raíces, Las raíces de la función se obtienen al resolver la ecuación $x^2 - 4 = 0$.
Así que las raíces de la función son: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Puntos de ruptura, los puntos de ruptura de la función se encuentran al resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$, cuyas raíces son: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, así que los valores que determinan los puntos de ruptura de la función son, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Dominio de la función, El dominio de la función son los números reales menos los valores de los puntos de ruptura.

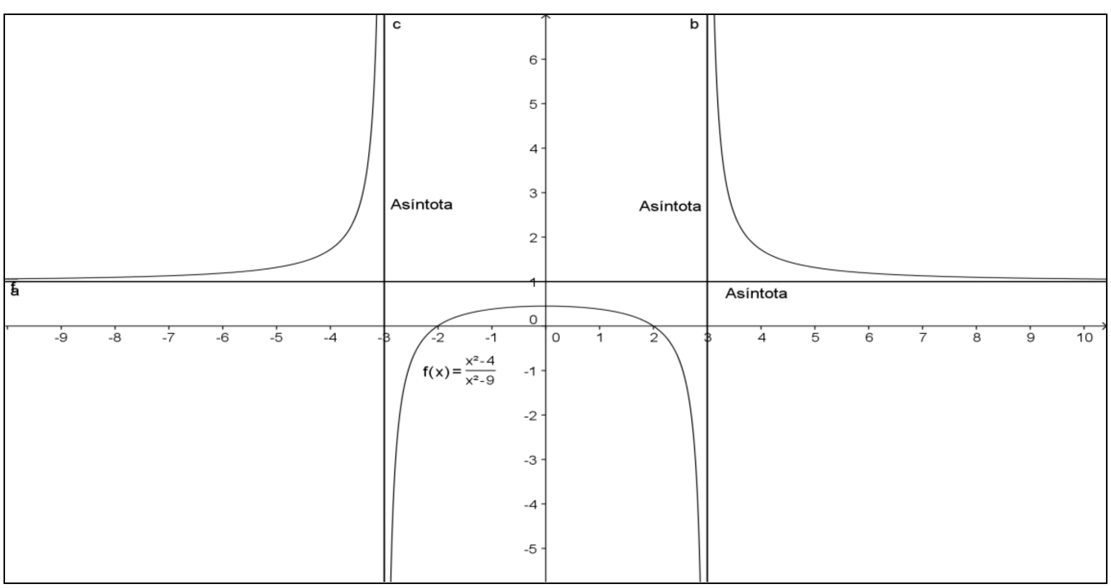
$D_f = \{x \,/\, x \in R,\ x \neq -3 \text{ y } x \neq 3\}$

Comportamiento de la función, haciendo una tabla para valores de x menores que –3, luego entre –3 y 3 y mayores que 3. Observar que los valores de la función para valores de x que están a la misma distancia del origen son iguales, esto se debe a que la función racional que estamos trabajando es una función par, o sea que cumple con $f(-x) = f(x)$. Conforme x se acerca a 3 por la izquierda la función toma valores negativos de magnitud grande y cuando se acerca –3 por la derecha sucede lo mismo.

Cuando una función es par, significa que su gráfica es simétrica con respecto al eje de las ordenadas, que funciona como un espejo como se vera posteriormente cuando se muestre la gráfica de la función.

Cuando nos acercamos a –3 por la izquierda la función toma valores positivos grandes y cuando nos alejamos hacia la izquierda de –3 la función toma valores cercanos a 1, lo mismo sucede si nos acercamos a 3 por la derecha la función toma valores positivos grandes y cuando nos alejamos de 3 toma valores cercanos a 1.

Asíntotas, La recta horizontal $y = 1$ es una asíntota horizontal a la gráfica de la función.
La gráfica de la función tiene asíntotas verticales que pasan por los valores de ruptura y sus ecuaciones son, $x = -3$ y $x = 3$.
La gráfica de la función es la siguiente.



El rango de la función: En este caso el rango de la función esta compuesto de dos intervalos, el primero de ellos contiene todos los positivos mayores que uno, el cual se puede escribir como.

$$\{y \ / \ y > 1\} \quad \text{o} \quad y \in (1, \infty)$$

El segundo intervalo formado por todos los números que son menores o iguales al número $y = 4/9 = 0.444$, que corresponde a $f(0)$

Este conjunto se puede escribir como.

$$\{y \ / \ y \leq 4/9\} \quad \text{o} \quad (-\infty \ , 4/9]$$

$$\text{El rango es:} \qquad R: y \in (-\infty, 4/9] \cup (1, \infty)$$

Ejemplo 2: Encuentra el dominio, el rango, los puntos de ruptura, las raíces, las asíntotas y la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 2}$.

Solución:

Raíces de la función: Los ceros de la función f(x) se encuentran al resolver la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$, que resulta de igualar el numerador de la función a cero.

Y estas son: $x_1 = -5$ y $x_2 = 3$.

Puntos de ruptura: Son las raíces de la ecuación que resulta de igualar el denominador de la función a cero, $x^2 + x - 2 = 0$, sus soluciones son: $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$.

Dominio de la función: El dominio de la función son todos los números reales menos los puntos de ruptura.

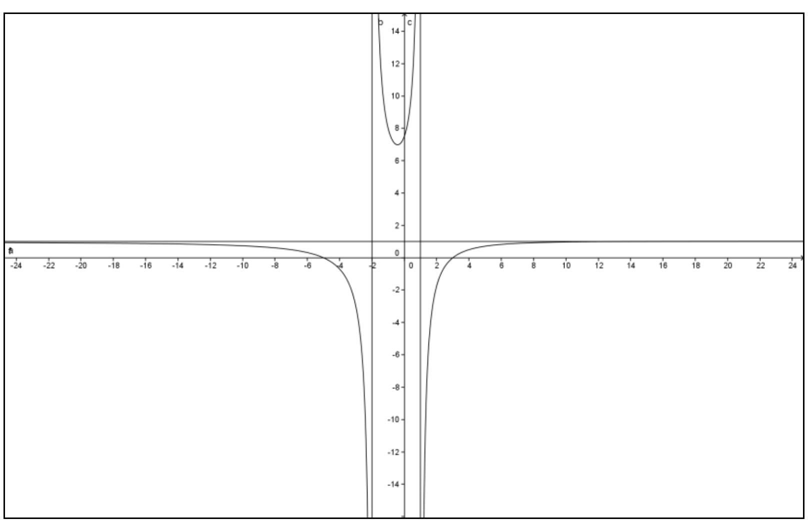
$$D_f = \{x \ / \ x \ \varepsilon \ R, \ \ x \neq -2 \ \text{ y } \ x \neq 1)\}$$

Asíntotas: La gráfica tiene dos asíntotas verticales y cada una pasa por los puntos de ruptura y sus ecuaciones son: $x = -2$ y $x = 1$.

Para tener la ecuación de la asíntota horizontal primero hacemos la división indicada en la función, $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 2} = 1 + \dfrac{-3x - 13}{x^2 + x - 2}$, donde el cociente es 1 y el residuo es $-3x - 13$, y la ecuación de la **asíntota horizontal** es $y = 1$.

Cruza el eje Y en: $f(0) = 15/2 = 7.5$

Localizando las raíces en el plano de coordenadas y trazando las asíntotas verticales se tienen 3 regiones, dándole a x algunos valores en estas regiones se puede delinear la gráfica



La curva de la región central es simétrica y tiene un mínimo exactamente a la mitad de la región $x = -0.5$, evaluamos la función en este punto, $f(-0.5) = 7$.
El rango es: R: $y \in (-\infty, 1) \cup [7, \infty)$

Ejemplo 3) Traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{8 - x^2}$ y analízala.

Solución:
Primero encontramos las raíces del denominador para así tener el dominio y las asíntotas verticales; $8 - x^2 = 0$, $8 = x^2$, así que $x = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2.8284$
El dominio de f es: D = ______________________

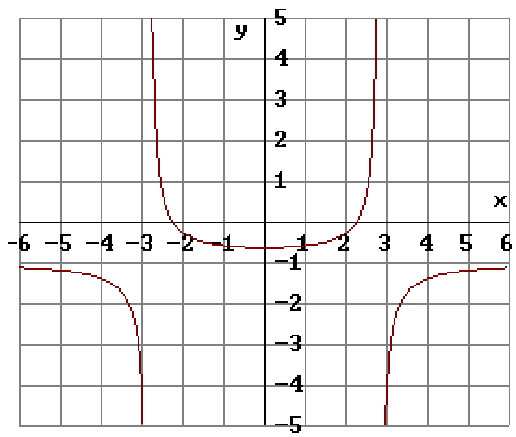
Las asíntotas verticales son: _____________ y ____________

Al igualar el numerador a cero tenemos los puntos donde cruza al eje ____, así que cruza al eje X en ___________ y en ___________; cruza al eje Y en __________

Se tienen 3 regiones y están dadas por los intervalos: ___________, __________

y ___________. Evalúa en los siguientes puntos y localízalos sobre la gráfica

f(-3)=	f(-2.8)=	f(3)=
f(-4)=	f(-2.5)=	f(4)=
f(-5)=	f(-2)=	f(5)=
f(-10)=	f(-1)=	f(10)=
f(-20)=	f(1)=	f(20)=
f(-100)=	f(2)=	f(100)=
	f(2.8)=	

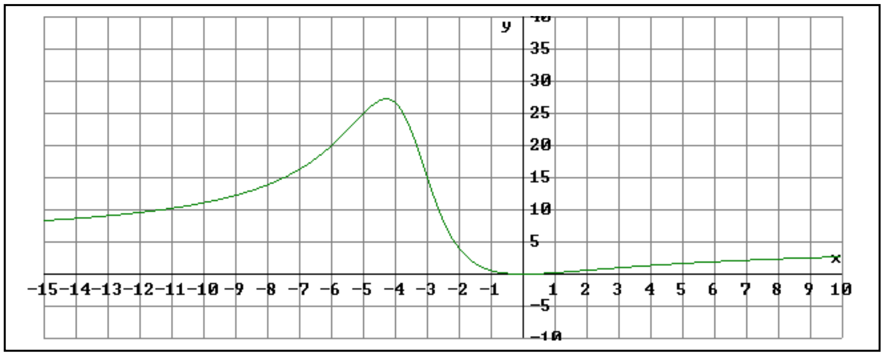


La asíntota horizontal es: ___________________________
El rango es: Rango = ____
Marca las asíntotas verticales y la asíntota horizontal sobre la gráfica.

Ejemplo 4) Traza un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 + 7x + 15}$

Solución:
Igualamos el denominador a cero, $x^2 + 7x + 15 = 0$ si resuelves esta ecuación te darás cuenta de que no tiene raíces reales, son complejas por lo que el dominio esta formado por ____________________ y no tiene asíntotas _______________

Si igualamos a cero el numerador vemos que $x=0$ es una raíz doble por lo tanto no debe cruzar el eje X solamente lo toca.
Evalúa en los siguientes puntos y localízalos en la gráfica



g(-1)=	g(1)=
g(-2)=	g(2)=
g(-3)=	g(3)=
g(-4)=	g(4)=
g(-5)=	g(5)=
g(-6)=	g(8)=
g(-8)=	g(10)=
g(-10)=	g(20)=
g(-20)=	g(50)=
g(-50)=	

Cuando nos alejamos hacia la derecha la función toma valores que se acercan a ________ por ________, y cuando nos alejamos hacia la izquierda la función toma valores que se acercan a ________por ________, por lo tanto __________es una asíntota horizontal, (márcala sobre la gráfica) esta resulta de hacer la división de $5x^2$/______.

NOTA PARA EL PROFESOR: Hay que ir remarcando que hasta aquí todas las funciones racionales analizadas solo tienen una asíntota horizontal

Ejercicios 2.3.6) Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones y analízalas.

1) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-1}$	6) $f(x)=\frac{x^2-25}{x^2-4}$	11) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-25}$
2) $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2}$	7) $f(x)=\frac{4-x^2}{x^2-9}$	12) $f(x)=\frac{2x^2-4}{x^2-8}$
3) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-16}$	8) $g(x)=\frac{x^2-13x+36}{x^2-8x+12}$	13) $H(x)=\frac{x^2-8x+12}{x^2-13x+36}$
4) $J(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3x+8}$	9) $K(x)=\frac{2x^2-6x+4}{x^2-2x-3}$	14) $L(x)=\frac{x^2+9}{x^2+16}$
5) $M(x)=\frac{x^2+16}{x^2+9}$	10) $N(x)=\frac{x^2+5x+9}{x^2+8x+12}$	15) $P(x)=\frac{x^2+10x+24}{2x^2}$

PARA COMPLEMENTAR SE PUEDE VER LA PRESENTACIÓN QUE SE ENCUENTRA EN LA DIRECCIÓN:
http://www.slideshare.net/juanjoexpo/funciones-racionales

2.3.7 Funciones de la forma $f(x) = \dfrac{\textit{funcion cuadratica}}{\textit{funcion lineal}}$

Aquí se muestra un ejemplo que el profesor puede realizar en clase poniendo énfasis en los puntos que considere necesarios para que el grupo avance y reafirme lo anterior, los otros dos son para que el alumno los trabaje y se discutan de manera grupal.

Ejemplo 1: Encuentra el dominio, el rango, los puntos de ruptura, las raíces, las asíntotas y la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 2}$.

Solución:

Raíces, Las raíces de la función se encuentran al resolver la ecuación que resulta de igualar a cero el numerador.

$x^2 - 16 = 0$, $x = \pm 4$, la función tiene dos raíces, $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$.

Puntos de ruptura, se encuentran al resolver la ecuación que resulta de igualar a cero el denominador de la función.

$x - 2 = 0$, de donde $x = 2$, la función tiene un punto de ruptura cuando $x = 2$ y por lo tanto una asíntota vertical de ecuación $x = 2$.

Dominio de la función, es el conjunto de los números reales menos los valores de x en los puntos de ruptura.

D_f = {x / x es un número real diferente de 2} = {x / x ε R y $x \neq 2$}

Comportamiento de la función, hay dos casos que nos interesan, primero cuando los valores de x se acercan a la abscisa del punto de ruptura con valores mayores y con valores menores, y el segundo comportamiento es cuando los valores de x se alejan del punto de ruptura hacia ambos lados.

Cruza al eje X en -4 y 4 y cruza al eje Y en $f(0) = 8$

Hay que hacer una tabla con valores que cumplan los dos casos de interés alrededor de 2 cerca y lejos.

Asíntotas, la gráfica de la función tiene una **asíntota vertical** en el punto de ruptura $x = 2$.

La otra asíntota se obtiene haciendo la división indicada en la función racional.

$$\frac{x^2 - 16}{x - 2} = x + 2 - \frac{12}{x^2 - 16}$$

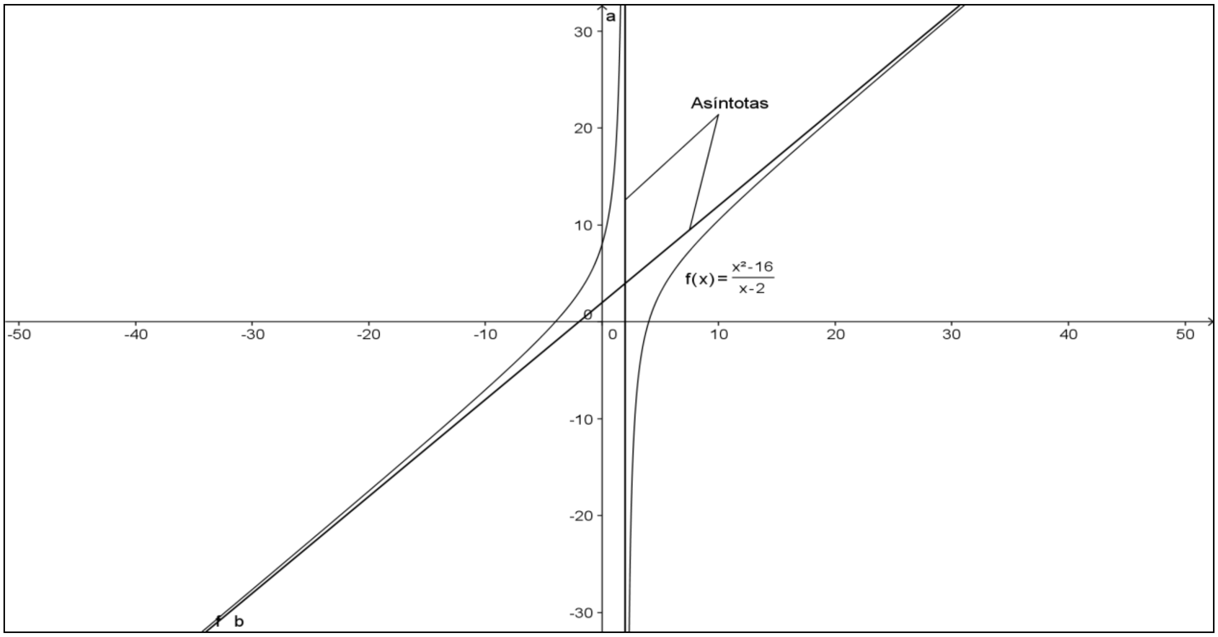
Donde $x + 2$ es el cociente y -12 es el residuo, así la otra **asíntota** a la gráfica de la función es la recta $y = x + 2$.

NOTA: Si el grado del numerador de la función racional es mayor que el del denominador de la función en uno, la grafica de la función tiene una asíntota oblicua cuya ecuación es, $y = mx + b$ (cociente de la división indicada en la función).

Rango de la función, el rango de la función son todos los números reales.

$R_f = R$

Trazando las asíntotas y localizando los puntos donde cruza a los ejes coordenados y los puntos en donde se evalúo la función la gráfica de la función queda como sigue.



Ejemplo 2) Traza un bosquejo de la gráfica de la función $F(x) = \dfrac{4-x^2}{2x}$

Solución:

El dominio de la función es: D = ____________________________

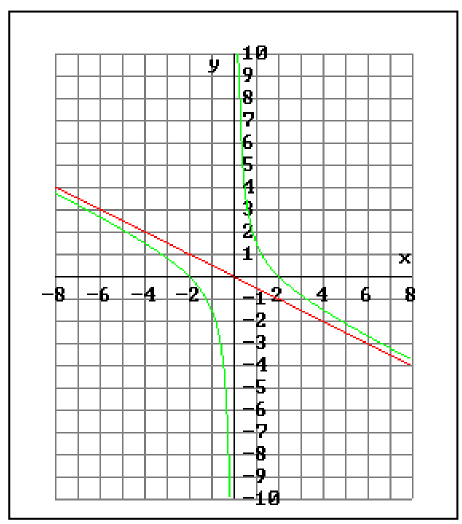
Tiene una asíntota vertical de ecuación: ________________

Al igualar el numerador a cero las raíces son: ____________ y ____________

Cruza al eje X en: _______ y _________, cruza al eje Y _________

Evalúa en los siguientes puntos y márcalos sobre la gráfica

F(-0.5)=	F(0.5)=
F(-1)=	F(1)=
F(-2)=	F(2)=
F(-3)=	F(3)=
F(-4)=	F(4)=
F(-5)=	F(5)=
F(-6)=	F(6)=
F(-7)=	F(7)=
F(-8)=	F(8)=



Realiza la siguiente división

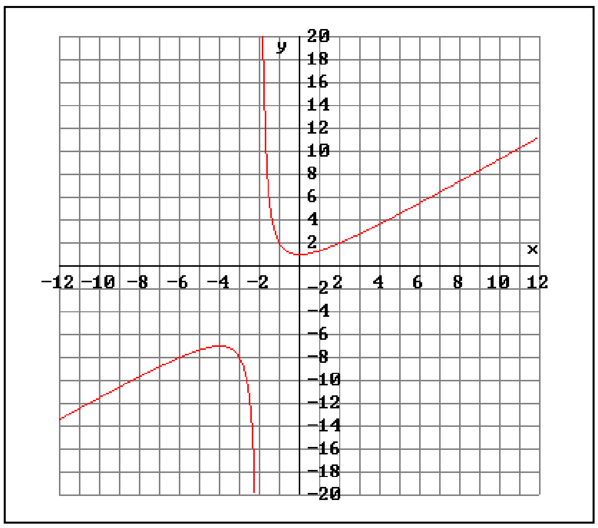
$$2x\overline{\smash{)}-x^2+4}$$

Traza la recta $y = \frac{1}{2}x$ sobre la gráfica

Corresponde a la que ya esta trazada ________. Si te das cuenta la curva se pega a esta recta, cuando nos alejamos hacia la derecha se acerca por ____________ y cuando nos alejamos hacia la izquierda la curva se acerca por ____________.
Esta recta es una **asíntota oblicua** y las vamos a tener cuando tengamos en el numerador una función cuadrática y en el denominador una función lineal.
El rango de la función es: Rango = ________________________

Ejemplo 2) Traza la gráfica de la función $R(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 2}$

Solución:
El dominio de la función es: D = _______________________
La asíntota vertical es: ____________
Al igualar el numerador a cero se tienen raíces _______________
Cruza al eje X en: ____________________ y al eje Y lo cruza en _______________
Evaluamos alrededor de: _________



R(-2.2)=	R(1.8)=
R(-2.5)=	R(1.5)=
R(-3)=	R(2)=
R(-4)=	R(3)=
R(-5)=	R(4)=
R(-8)=	R(6)=
R(-10)=	R(10)=
R(-20)=	R(20)=
R(-50)=	R(50)=

La ecuación de la asíntota oblicua es: __________________, $x + 2\overline{)x^2 + x + 2}$

Traza la asíntota vertical y la asíntota oblicua sobre la gráfica.

El rango de la función R es: Rango = __________________________

De acuerdo a la gráfica entre –4 y –3 hay un máximo y entre –1 y 0 hay un mínimo, puedes evaluar y aproximar el intervalo que no está incluido en el rango.

Nota para el profesor: Es conveniente verificar si los alumnos se han dado cuenta de que ahora en estos casos ya no tienen asíntotas horizontales y aparece la asíntota oblicua, por lo que hay que resaltar que las funciones racionales tienen **a lo más una asíntota horizontal** (tienen una o no tienen).

Ejercicios) Traza un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones y analízalas.

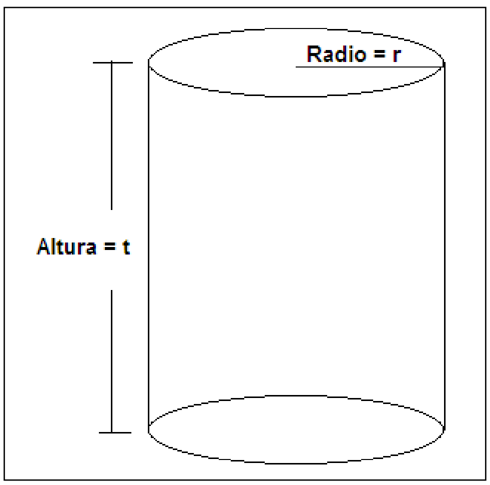
1) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+1}$	5) $f(x)=\frac{x^2-25}{x-4}$	9) $f(x)=\frac{x^2}{x-5}$
2) $f(x)=\frac{x^2-16}{x}$	6) $f(x)=\frac{4-x^2}{x-9}$	10) $f(x)=\frac{2x^2-4}{x-8}$
3) $Q(x)=\frac{x^2+9}{x-2}$	7) $R(x)=\frac{x^2-4}{x+1}$	11) $S(x)=\frac{x^2-5x-4}{2x-7}$
4) $T(x)=\frac{2x^2-7x+9}{2x-5}$	8) $V(x)=\frac{6-x^2}{x}$	12) $Z(x)=\frac{x^2}{x+1}$

PARA COMPLEMENTAR LO APRENDIDO Y VERIFICAR LOS EJERCICIOS SE PUEDE IR A LA PÁGINA INTERACTIVA DE DIRECCION:
http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Representaci%C3%B3n_de_fun

2.4 Resolución de problemas con fenómenos diversos (geométricos y físicos) susceptibles de modelarse a través de funciones racionales.

Aprendizaje: Resuelve problemas sobre valores extremos en una función racional, por medio de una aproximación numérica.

Ejemplo 1: Determinar las dimensiones de una lata cilíndrica cuyo volumen es de 64 cm^3. Si queremos usar la menor cantidad de material en su construcción.



La fórmula para encontrar el volumen del cilindro es:
$V=\pi r^2 t$
Donde V representa el volumen, π es una constante cuyo valor aproximado es 3.1416, r es el radio de la base y t es la altura del cilindro.
La fórmula para encontrar el área total del cilindro es:

$$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rt$$

A_t representa el área total
Como el volumen es 64 se puede establecer la igualdad. $64=\pi r^2 t$

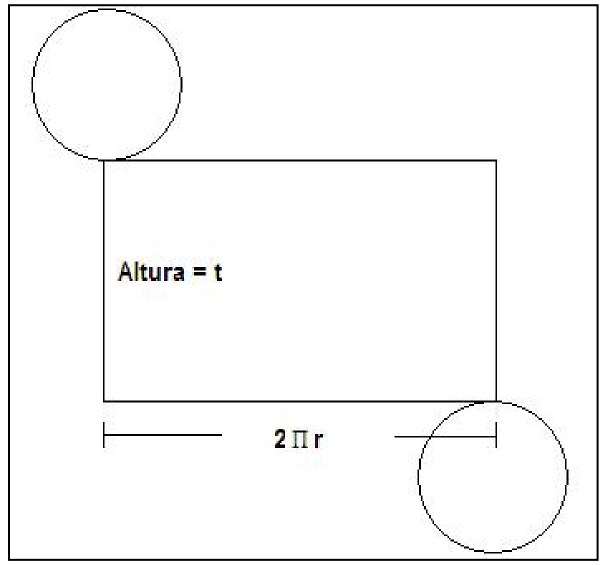
Despejando t se obtiene. $t=\frac{64}{\Pi r^2}$

Sustituyendo t en la ecuación del área total, tenemos

$$A_t = 2\Pi r^2 + 2\Pi r\left(\frac{64}{\Pi r^2}\right)$$

Simplificando, se tiene que el área total esta en función del valor del radio.

$$A_t(r) = 2\Pi r^2 + \frac{128}{r}$$



a) Efectúa la suma de fracciones indicada, y escribe la función resultante.
A(r) =

b) De acuerdo a las condiciones del problema el dominio de la función es: ____________________

c) Encuentra las raíces de la función: ______________________________

d) De acuerdo a las condiciones del problema, ¿las raíces pertenecen al dominio de la función: ____________ ____________________________

e) ¿tiene puntos de ruptura la función? ______, ¿cuáles son? _________________

f) Escribe la ecuación de la asíntota a la gráfica de la función: ________________

g) Para encontrar la solución al problema, completa la siguiente tabla de valores para explorar el valor aproximado.

r	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
A(r)							

h) ¿Consideras de acuerdo a los resultados obtenidos, que la solución del problema esta entre algunos de los valores de r? ____________________

i) En caso afirmativo, escribe dentro de que valores: ___________ y ____________

j) Si consideraste un par de valores, vamos a dividir ese intervalo usando 5 valores que sean equidistantes, _____, _____, _____, _____, _____.

k) En la siguiente tabla escribe los valores extremos los puntos de división y completa la tabla de valores usando una calculadora.

r							
A(r)							

l) Escribe el valor de r que consideras nos da el mejor valor para la solución del problema. ____________________

m) Escribe el valor de la función correspondiente al valor de r seleccionado. _______

n) Si el m^2 de material cuesta $100.00, el valor del material empleado en la construcción del cilindro es: ___________________

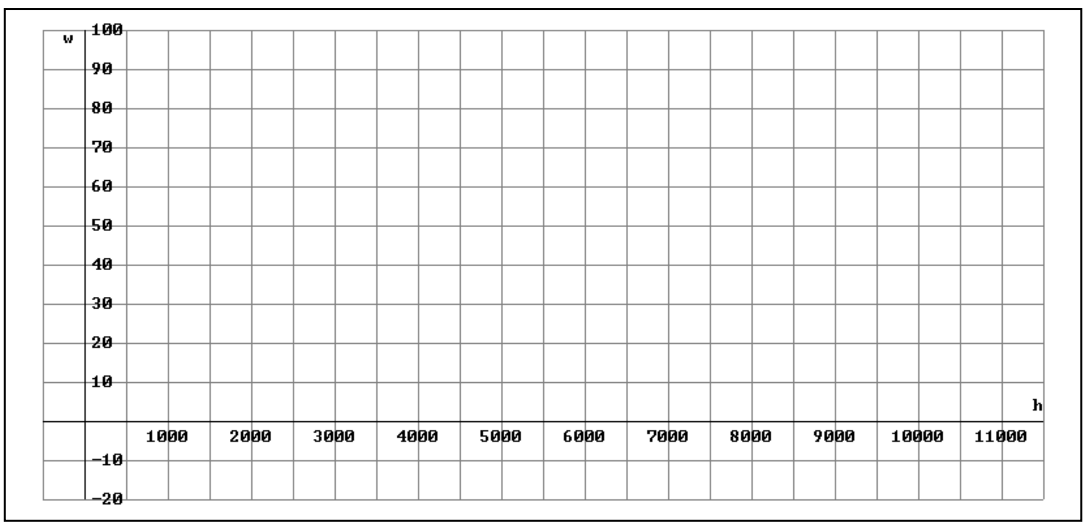
Ejemplo 2) El peso w de un objeto a una altura h sobre la superficie de la Tierra esta dado por $w = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 w_0$, donde w_0 es el peso del objeto al nivel del mar y R = 6 400 km es el radio de la Tierra. Suponga que el peso de un objeto al nivel del mar es de 80 N. Con una escala apropiada traza la gráfica del peso del objeto en función de su altura.

Solución:

a) Sustituyendo los valores de R y w_0 tenemos que $w = \left(\dfrac{6400}{6400+h}\right)^2 80$

b) La gráfica de esta función es de la forma __________

c) Como a h le sumamos __________ se recorre sobre el eje ____a la __________
d) Como en el denominador hay un factor de $(6400)^2$(   ) = ____________
Se alarga ________________
e) La asíntota horizontal es el eje x cuya ecuación es _____________
f) La ecuación de la asíntota vertical es: ______________________
g) Qué valores nos interesan de h _______________________
h) ¿Cuál es el dominio de esta función de acuerdo a las condiciones del problema ____________________________
i) El rango de la función es: ________________________
j) Traza la gráfica del peso en función de la altura sobre el siguiente plano evaluando en algunos puntos



Ejercicios 2.4.

1. Una lata cilíndrica debe contener 10π pulgadas cúbicas. Escribe una función para S(r), el área total del cilindro en términos del radio r. Realiza una gráfica de la función S y utiliza la gráfica para determinar el valor del radio r de la lata para el cual se necesita la menor cantidad de material para producirla.

2. Según la ley de Boyle, a temperatura constante la presión P de un gas comprimido es inversamente proporcional al volumen, V. Supongamos que la presión es 25 libras por pulgada cuadrada cuando el volumen del gas es 400 pulgadas cúbicas. Encuentra una función que exprese la presión del gas en términos del volumen que ocupa si se mantiene la temperatura constante, además encuentra el dominio de la función, el rango, los puntos de ruptura, las asíntotas y la gráfica.

3. Un fabricante de juguetes tiene gastos fijos de $20 000 y costos directos (mano de obra y materia prima) de $50.00 por juguete. Escribir una función P(x), de costo promedio por unidad, si la compañía produce x juguetes, además encuentra el dominio de la función, el rango, los puntos de ruptura, las asíntotas y la gráfica.

4. Una compañía produce componentes electrónicos para televisores. Según sus registros un nuevo empleado puede ensamblar en promedio N(t) componentes por día, después de t días de capacitación, N está dada por $N(t)=\dfrac{50t}{t+4}$, $t \geq 0$.

   Traza la gráfica de N, incluyendo cualquier asíntota vertical u horizontal. ¿A qué valor tiende N conforme $t \to \infty$?

5. La concentración c(t) de cierto fármaco en la sangre, t horas después de ser inyectado viene dada por $c(t)=\dfrac{25t}{(t+1)^2}$. Da el dominio de la función y traza su gráfica.

6. En una clase de psicología se realizó un experimento sobre capacidad de retención. Durante 20 días se le pidió a cada estudiante memorizar una lista diferente cada día de 40 caracteres especiales. Al terminar el día debían regresar la lista, y anotar en cada día sucesivo del periodo que duro la prueba una lista con tantos símbolos como pudieran recordar. Al final se sacaron promedios y se encontró que una buena aproximación del promedio del número de símbolos, N(t), retenidos después de t días está dado por:

$$N(t)=\frac{5t+30}{t} \qquad t \geq 1$$

   Traza la gráfica de N, incluyendo las asíntotas. ¿A que valor tiende N conforme $t \to \infty$?

7. La comisión de Parques y Fauna introduce 80 000 peces en un gran lago artificial. El crecimiento de la población de peces, en miles, está dado por:

$$N=\frac{20(4+3t)}{1+0.05t}, \quad 0 \leq t \quad \text{en donde t es el tiempo en años.}$$

   a) Halla la población cuando t sea 5, 10 y 25 años.
   b) ¿Cuál es el número límite de peces en el lago al aumentar el tiempo?