Los divisores del término independiente son fundamentales para aplicar el teorema de las raíces racionales (segundo método), el cual estudiaremos con mayor detalle en el siguiente punto. Por el momento es bueno saber identificar al término independiente y sus divisores, ya que preparará al alumno para entender lo que se estudiará posteriormente.

Actividad

Completar la siguiente tabla, donde para cada función polinomial se identifica su término independiente y sus divisores.

Función	T. I.	Divisores
$P(x) = 7x^2 + 7x - 12$	–12	±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12
$F(x) = x^3 + 7x^2 + 7x$	0	Ninguno
$G(x) = 2x^4 + 8x^2 - x + 15$		
$F(x) = 7x - 6$		
$F(x) = x^5 + 7x^4 + 7x^2 - 10$		
$F(x) = -5x^2 + 2x + 8$		
$F(x) = 5x^4 + 7x^3 - x - 5$		

1.4.6) Identificación de tipos de raíz: Enteras, racionales, reales, complejas y su multiplicidad.

Para hacerlo veremos dos métodos para encontrar los ceros de las funciones polinomiales, estos son el Teorema de las Raíces Racionales y un método para encontrar los ceros por Aproximaciones sucesivas.

Nota para el profesor: Proponemos algunos ejemplos que pueden ser vistos en clase o dejarse de lectura a los alumnos. Estos les harán comprender como se utiliza estos métodos para encontrar los ceros de una función polinomial.

a) Teorema de las Raíces Racionales

Si tenemos $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1 x^1 + a_0$ ($a_0 \neq 0$) una función polinomial de grado n con coeficientes enteros, y si $\frac{p}{q}$ en su mínima expresión es una raíz racional de $f(x) = 0$, entonces p es factor de a_0 y q es factor de a_n.

Ejemplo 1. Encuentra todas las raíces racionales de la función $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ y traza un bosquejo de su gráfica:

Solución:

Las raíces racionales si es que las hay, deben de ser de la forma $\frac{p}{q}$ donde p es un factor de a_0 y q un factor de a_n.

Primero: Observa que a_0 es el término independiente y en este caso a_0 = – 3 y a_n es el coeficiente del término con mayor potencia de x, es decir, a_n = 2.

Segundo: Como p debe ser factor de –3 los posibles valores de p son : ±1, ±3.
Como q debe ser factor de 2 los posibles valores de q son : ±1, ±2

Tercero: Entonces las posibles raíces son:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{-1}, \frac{3}{-2}, \frac{-3}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{-1}, \frac{-3}{-2}$$

Simplificando, las posibles raíces son: $1,\ \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 3,\ \frac{3}{2}, -3, -\frac{3}{2}$

Cuarto: Usando división sintética podemos verificar cuales son raíces, recuerda que para que un número sea raíz el residuo debe ser cero.

Empecemos con los enteros positivos, el 1:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ & & 2 & -1 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & -9 & -12 \end{array} \quad P(1)$$

Cómo el residuo no es cero, 1 no es raíz de $P(x)$. Continuando ahora con 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ & & 6 & 9 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \quad P(3)$$

Cómo el residuo es cero, 3 es raíz de $P(x)$. Entonces por el Teorema del factor x – 3 es uno de sus factores, y la función polinomial se puede escribir como:

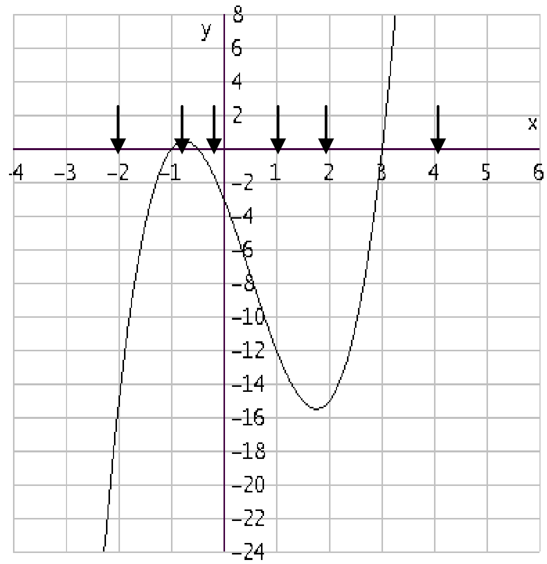
$$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x + 1)$$

Ya conocemos una raíz, las otras dos las encontraremos resolviendo la ecuación de segundo grado: $2x^2 + 3x + 1 = 0$ cuyas soluciones son: x_2 = – ½ y x_3 = – 1

Así los tres ceros de $P(x)$ son: x_1= 3, x_2=-½ y x_3= –1

Quinto: Una estrategia para trazar su gráfica es:

Para hacer un bosquejo de su gráfica recordemos que como es cúbica y el término principal tiene signo positivo, la rama de la izquierda se extiende hacia abajo y la de la derecha hacia arriba, además se sabe que la gráfica corta al eje X en los puntos x_1= 3, x_2=-½ y x_3= –1. Para mayor información sobre la gráfica, se recomienda evaluar la función en puntos que estén entre las raíces como se ve en la tabulación.



$P(-2) = -15$
$P(-\frac{3}{4}) = 0.47$
$P(-\frac{1}{4}) = -1.22$
$P(1) = -12$
$P(2) = -15$
$P(4) = 45$

Recordar que si el término independiente es – 3, la grafica debe cortar al eje Y en – 3.

Ejemplo 2. Encontrar todos los ceros racionales (si es que tiene) de la función

$$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 13x + 9$$

y hacer un bosquejo de su gráfica.

Solución:

Primero: Localizamos los valores del término independiente y del coeficiente principal: $a_0 = 9$ y $a_n = 2$

Segundo: Como p debe ser factor de 9, los posibles valores de p son: ± 1, ± 3 y ± 9
Como q debe ser factor de 2, los posibles valores de q son: ± 1 y ± 2

Tercero: Las posibles raíces son:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{-1},\frac{1}{-2},\frac{-1}{1},\frac{-1}{2},\frac{-1}{-1},\frac{-1}{-2},\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{3}{-1},\frac{3}{-2},\frac{-3}{1},\frac{-3}{2},\frac{-3}{-1},\frac{-3}{-2},\frac{9}{1},\frac{9}{2},\frac{9}{-1},\frac{9}{-2},\frac{-9}{1},\frac{-9}{2},\frac{-9}{-1},\frac{-9}{-2}$$

Simplificando, las posibles raíces son: $1, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, -3, -\frac{3}{2}, 9, \frac{9}{2}, -9, -\frac{9}{2}$

Cuarto: Usando división sintética podemos verificar cuales de estas son raíces.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -3 & 10 & -13 & 9 \\ & & 2 & -1 & 9 & -4 \\ \hline & 2 & -1 & 9 & -4 & 5 \end{array}$$

$Q(1) = 5$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & -3 & 10 & -13 & 9 \\ & & 6 & 9 & 57 & 132 \\ \hline & 2 & 3 & 19 & 44 & 141 \end{array}$$

$Q(3) = 141$

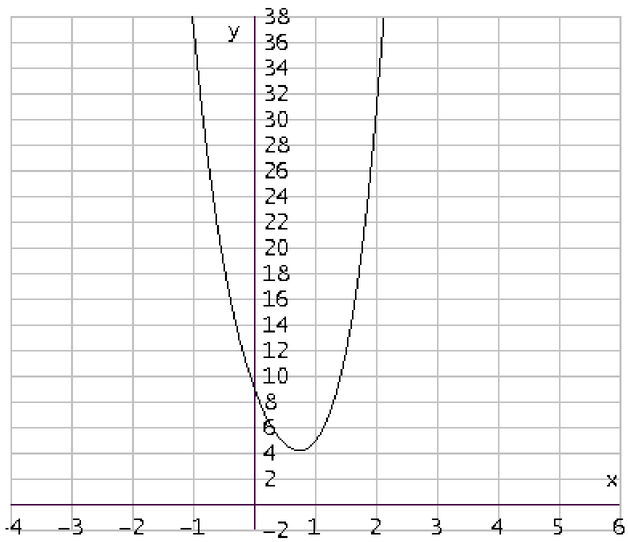
Se observa que en ambas divisiones todos los números del tercer renglón son positivos, por lo tanto no hay que seguir con los positivos $\frac{9}{2}$ y 9, ya que el residuo va a ser cada vez más grande.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 2 & -3 & 10 & -13 & 9 \\ & & 1 & -1 & 9/2 & -17/4 \\ \hline & 2 & -2 & 9 & -17/2 & 19/4 \end{array} \qquad Q(\tfrac{1}{2}) = 19/4$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{3}{2} & 2 & -3 & 10 & -13 & 9 \\ & & 3 & 0 & 15 & 3 \\ \hline & 2 & 0 & 10 & 2 & 12 \end{array} \qquad Q(\tfrac{3}{2}) = 12$$

Continuaremos con ½ y $\frac{3}{2}$ Al hacer sus divisiones sintéticas, se ve que no son raíces, por lo tanto $Q(x)$ no tiene ceros o raíces racionales.

Quinto: Para trazar su gráfica, como es de grado 4 y el coeficiente principal tiene signo positivo, las dos ramas se extienden hacia arriba. Como no tenemos una raíz, se usan los cuatro valores encontrados y se evalúa en otros más. Como no se ha evaluado para valores negativos, se recomienda hacerlo. Y se ve que los residuos también son positivos, esto nos dice que la gráfica se encuentra por arriba del eje X, y en consecuencia nunca lo cruza. Por lo que no tiene raíces reales, sus 4 raíces son complejas. Al trazar su gráfica usando los valores encontrados, queda de la siguiente forma:



$Q(1) = 5$
$Q(3) = 141$
$Q(\tfrac{1}{2}) = 19/4$
$Q(\tfrac{3}{2}) = 12$
$Q(-1) = 37$
$Q(-3) = 321$

Recordar que si el término independiente es 9, la grafica debe cortar al eje Y en 9.

PARA COMPLEMENTAR LO APRENDIDO EN ESTA PARTE SE PUEDE VER LOS VIDEOS EN LAS SIGUIENTES DIRECCIONES:
http://matematicasies.com/?Ecuaciones-de-grado-superior-3o-4o
http://matematicasies.com/?Raices-y-Factores-de-un-polinomio

Ejercicio 1.4.6 a)
Encontrar todos los ceros racionales de cada una de las funciones y hacer un bosquejo de su gráfica.

1) $f(x) = 9x^3 – 18x^2 – 31x +12$	2) $g(x) = 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 2x – 3$
3) $h(x) = x^5 –5x^3 + 2x^2 + 6x – 4$	4) $k(x) = x^4 – 2x^3 – 3x^2 + 8x – 4$
5) $m(x) = x^3 – x^2 –10x – 8$	6) $n(x) = –2x^3 – 3x^2 + 17x + 30$
7) $p(x) = –6x^4 +17x^3 – 7x^2 – 8x + 4$	8) $q(x) = –3x^4 + 22x^3 – 41x^2 + 4x + 28$

b) Método por Aproximaciones Sucesivas

Existen muchos métodos para encontrar los ceros irracionales de una función polinomial, estos métodos nos determinan los ceros por medio de procesos de aproximación, de tal forma que se puede encontrar los ceros con la exactitud que se desee. Uno de ellos es el de aproximaciones sucesivas, en donde primero se localiza el cero entre enteros consecutivos, luego entre décimos consecutivos y luego entre centésimos consecutivos. Para utilizar este método es indispensable el uso de la calculadora. A continuación mostraremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Determinar los valores aproximados de los ceros de $f(x) = x^3 – 2x – 5$
Solución:
1º) Recordar que se quiere encontrar un valor para x que al sustituirlo en $f(x)$ nos dé cero, o muy aproximado a cero. Para esto se hacen algunas evaluaciones o divisiones sintéticas, por ejemplo:

$f(0) = –5$
$f(1) = (1)^3 –2(1) – 5 = – 6$
$f(2) =(2)^3 – 2(2) – 5 = –1$
$f(3) = (3)^3 – 2(3) – 5 = 16$ } cambio de signo, así que podemos afirmar que **entre 2 y 3 hay un cero**

2º) Siguen los décimos, es recomendable **utilizar la división sintética**.

Evaluando entre 2 y 3, es decir si $x = 2.5$, $f(2.5) = 5.625$ es positivo. El cero o raíz está entre 2 y 2.5.
Si $x = 2.3$, $f(2.3) = 2.567$ que sigue siendo positivo,
Si $x = 2.2$, $f(2.2) = 1.248$ sigue positivo.
Si $x = 2.1$, $f(2.1) = 0.061$ también es positivo, entonces **hay un cero entre 2.0 y 2.1**

3º) Continuando con los centésimos.
$f(2.05)= –0.484875$ es negativo, x debe acercarse más a 2.1
$f(2.06)= – 0.3781$; $f(2.07)= – 0.2702$; $f(2.08) = – 0.16108$; $f(2.09) = –0.050671$
Esto indica que el cero se encuentra entre **2.09 y 2.10**

4º) Se puede seguir con los milésimos.
$f(2.095) = 0.005007$ es positivo, x debe acercarse a 2.10, $f(2.094) = –0.0061534$. El más cercano a cero es $f(2.095)$, así que **la raíz aproximada es $x = 2.095$**,

5º) ahora en la división sintética, se puede ver cuál es la ecuación de segundo grado que se tiene que resolver para encontrar las dos raíces restantes.

La ecuación de segundo grado aproximada es:
$x^2 + 2.095x + 2.389025 = 0$ donde a= 1, b= 2.095 y c= 2.389025

$$x \approx \frac{-2.095 \pm \sqrt{2.095^2 - 4(1)(2.389025}}{2(1)} \approx \frac{-2.095 \pm \sqrt{-5.131975}}{2}$$

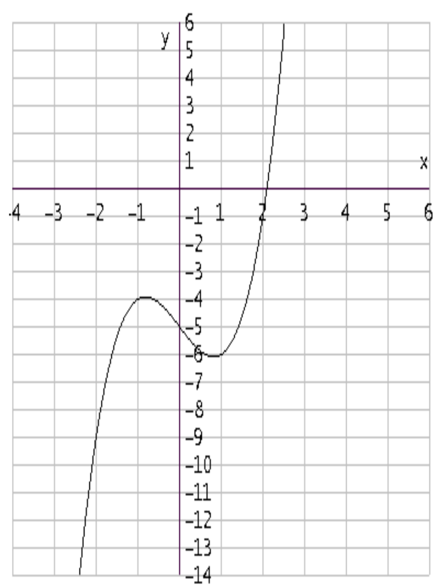
$$x_2 \approx \frac{-2.095 + \sqrt{-5.167075}}{2}$$

y $$x_3 \approx \frac{-2.095 - \sqrt{-5.167075}}{2}$$

estos son los dos ceros complejos aproximados

***f* tiene un cero real (irracional)** $x \approx 2.095$ **y dos ceros complejos**

6º) Trazo de la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x - 5$.
En un plano cartesiano se localizan los puntos encontrados anteriormente, y al unirlos se debe de obtener la siguiente gráfica.



Ejemplo 2. Determina los valores de los ceros aproximados de la función

$$F(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 3x - 1$$

Solución:

1°) Empezamos por buscar una raíz o cero positivo (aproximado), si tiene raíces racionales estas deben ser o 1 o –1, por el teorema de las raíces racionales.
Haciendo las divisiones sintéticas para cada valor se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & -6 & -3 & -1 \\ & & 1 & -2 & -8 & -11 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & -11 & -12 \end{array} \qquad F(1) = -12$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & -6 & -3 & -1 \\ & & -1 & 4 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & -2 & -1 & 0 \end{array} \qquad F(-1) = 0$$

Entonces **un cero o raíz es $x_1 = -1$**, es decir un factor es $x + 1$, entonces:

$$F(x) = (x + 1)(x^3 - 4x^2 - 2x - 1)$$

2º) Se sigue evaluando en algunos números positivos como:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -3 & -6 & -3 & -1 \\ & & 2 & -2 & -16 & -38 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & -19 & -39 \end{array} \qquad F(2) = -39$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & -3 & -6 & -3 & -1 \\ & & 3 & 0 & -18 & -63 \\ \hline & 1 & 0 & -6 & -21 & -64 \end{array} \qquad F(3) = -64$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 1 & -3 & -6 & -3 & -1 \\ & & 4 & 4 & -8 & -44 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & -11 & -45 \end{array} \qquad F(4) = -45$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & -3 & -6 & -3 & -1 \\ & & 5 & 10 & 20 & 85 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 17 & 84 \end{array} \qquad F(5) = 84$$

En $x = 5$ se tiene un cambio de signo, por lo tanto **hay un cero entre 4 y 5 y es irracional.**

3º) Se sigue evaluando entre 4 y 5: $F(4.5) = 0.6875$; $F(4.4) = -11.1024$ hay un cambio de signo, pero $x = 4.5$ se acerca más a cero por arriba.

$F(4.47) = -3.0029$; $F(4.48) = -1.7876$; $F(4.49) = -0.55751499$

4º) El cero está entre 4.49 y 4.5, ahora siguen los milésimos.

$F(4.495) = 0.06312$; $F(4.494) = -0.0613$ este se acerca más a cero así que

otro cero es $x_2 \approx 4.494$

5º) Se hace la división sintética para llegar a la ecuación de segundo grado

$$\begin{array}{r|rrrr} 4.494 & 1 & -4 & -2 & -1 \\ & & 4.494 & 2.22 & 0.9888 \\ \hline & 1 & 0.494 & 0.22 & -0.0112 \end{array} \qquad F(4.494) = -0.0112$$

la ecuación de segundo grado que queda es:

$$x^2 + 0.494x + 0.22 = 0; \quad \text{con} \quad a = 1,\ b = 0.494 \ \text{ y } \ c = 0.22$$

Resolviendo se tiene: $x_{3,4} \approx \dfrac{-0.494 \pm \sqrt{(0.494)^2 - 4(1)(0.22)}}{2} = \dfrac{-0.494 \pm \sqrt{-0.635964}}{2}$

$$x_3 \approx \frac{-0.494 + \sqrt{-0.635984}}{2}$$

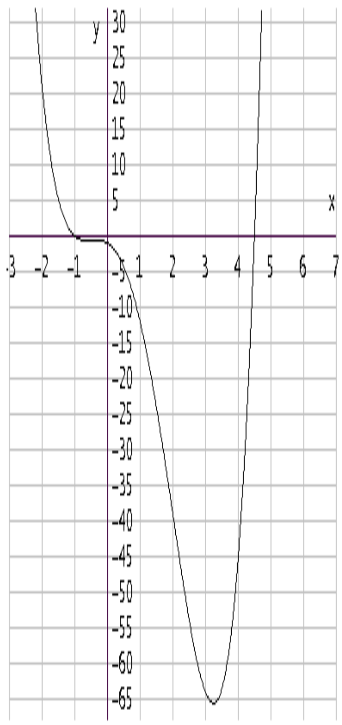
$$x_4 \approx \frac{-0.494 - \sqrt{-0.635984}}{2}$$

dos ceros complejos

Los ceros aproximados de $F(x)$ son: $x_1 = -1$, $x_2 \approx 4.494$, $x_3 \approx \dfrac{-0.494+\sqrt{-0.635984}}{2}$ y

$x_4 \approx \dfrac{-0.494-\sqrt{-0.635984}}{2}$

6º) Trazo de la gráfica de $F(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 3x - 1$.
En un plano cartesiano se localizan los puntos encontrados anteriormente, y al unirlos se debe de obtener la siguiente gráfica.



En conclusión de lo que se ha visto, se puede afirmar que los ceros o raíces de una función polinomial pueden ser: enteras, racionales, reales o complejas.

Ejercicio 1.4.6 b)
Determina los ceros reales aproximados y traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

1) $H(x) = -x^3 + 13x + 7$
2) $L(x) = -x^4 + x^2 + 3x + 1$
3) $M(x) = 3x^3 + 10x^2 - 13x + 9$
4) $N(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
5) $B(x) = 3x^4 - 22x^3 + 42x^2 - 4x - 28$
6) $C(x) = x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 14x^2 - 20x$
7) $R(x) = 2x^4 - 4x^2 - 5x + 8$
8) $S(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - 9x$

1.5 BOSQUEJO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$$

Aprendizajes:

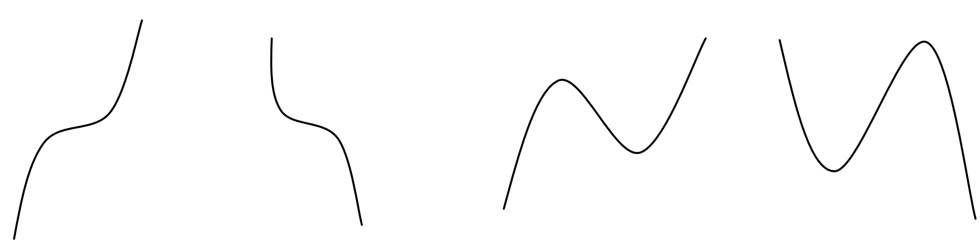
- *Determina las concavidades de la gráfica en base al signo y al exponente del término de mayor grado de la función polinomial y los ceros de la misma.*
- *Bosqueja la gráfica de funciones polinomiales a partir del comportamiento local y al infinito.*

Nota para el profesor: En esta parte también proponemos varios ejemplos que pueden ser vistos en clase o dejarse de lectura a los alumnos. En estos se hace un análisis dirigido a ellos para que hagan sus reflexiones y conjeturas sobre el bosquejo de las graficas que se trabajan en esta sección.

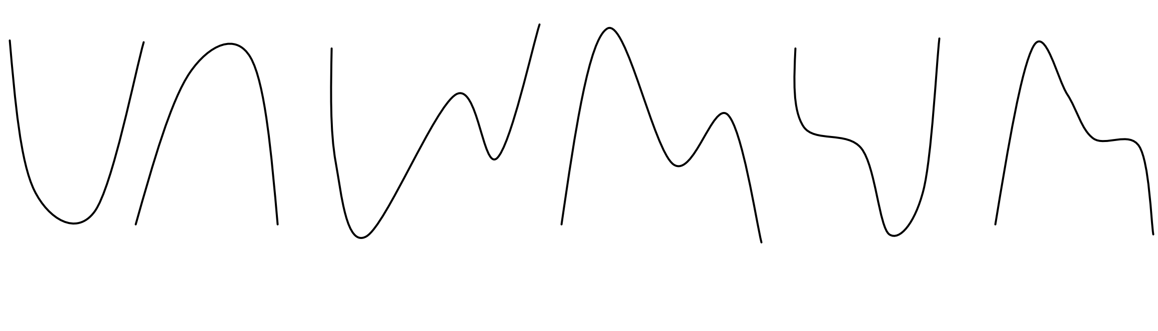
1.5.1) Intersecciones de la gráfica con los ejes cartesianos.

En base al análisis que se ha hecho anteriormente, de las funciones de la forma $f(x) = ax^n$ y conociendo sus ceros, así como el valor donde cruza al eje Y, delinear la función no debe resultar tedioso. Ya que no se trata de evaluar dicha función en una serie de puntos, lo cual resulta ser muy laborioso. En base al grado de esta y al signo del coeficiente principal, el alumno debe formarse una imagen muy aproximada de la forma de la gráfica, por lo menos para las de tercer y cuarto grado. Estas pueden tener diferentes formas que se muestran a continuación.

La gráfica de una función polinomial de tercer grado puede tener una de las cuatro formas siguientes:



Y para la gráfica de una función polinomial de cuarto grado aumentan sus posibilidades, ya que la forma entre sus ramas puede ser suave o puede ser curveada como se ve en la siguiente figura.



La forma de la gráfica en ambos casos depende de varias características como son:

Caso1) Si la función polinomial no tiene término independiente entonces su gráfica pasará por el origen del plano cartesiano.

Caso 2) Si el término independiente no es cero, entonces la gráfica de la función cortará al eje Y en ese valor.

Caso 3) Si la función polinomial esta factorizada, la intersección de la gráfica con el eje Y se encuentra evaluando la función en $x = 0$.

Caso 4) Las gráficas de las funciones polinomiales cúbicas y en general de grado impar, cruzan por lo menos una vez al eje X. Es decir, la ecuación asociada tiene por lo menos una raíz real.

Caso 5) Las gráficas de las funciones polinomiales de cuarto grado y en general de grado par, pueden NO cruzar al eje X. Es decir, la ecuación asociada NO tiene raíces reales.

Estas observaciones son de gran utilidad para trazar la gráfica de una función polinomial, por lo que deben tomarse en cuenta para el trazo de estas, como se verá en los ejercicios posteriores.

1.5.2) Análisis del comportamiento: Valor de a_n y Concavidad (alargamiento o compresión).

Para analizar el comportamiento de una función polinomial hay que tomar en cuenta todos los parámetros involucrados, así como el comportamiento que tienen estas cuando solo constan de un término ($f(x) = x^n$). y sobre todo hay que tener claro que las intersecciones con el eje X o los ceros reales a lo más son n que es el grado de la función.
También hay que recordar la multiplicidad de las raíces. Si esta es par, la gráfica toca al eje X pero no lo cruza y si es impar la gráfica cruza el eje X.
En cuanto a la forma en que se comporta la gráfica en esa raíz, al acercarse a esta, se puede decir que es muy parecida a la gráfica de las funciones $f(x) = x^k$ donde k es la multiplicidad de dicha raíz.

Valor de a_n: Si el coeficiente principal (a_n) es diferente de 1 la gráfica de la función sufre un alargamiento o una compresión y si además su valor es negativo la gráfica se invierte sobre el eje X.

Concavidad: Cuando el coeficiente principal (a_n) es negativo la gráfica de la función se invierte sobre el eje X (se refleja) y por lo tanto cambia la concavidad de la gráfica, en las regiones donde era cóncava hacia arriba ahora va a ser cóncava hacia abajo.

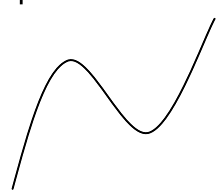
Índice de crecimiento (alargamiento o compresión): De acuerdo a lo antes visto en la sección 1.3.4 d), también debe quedar claro que si el coeficiente principal es mayor que uno ($a_n > 1$) la gráfica de la función se alarga en forma vertical y si su valor se encuentra entre cero y uno ($0 < a_n < 1$) ahora la gráfica de la función se comprime también en forma vertical.

Nota para el profesor: Para el índice de crecimiento es conveniente que los alumnos observen lo que sucede al multiplicar una función polinomial por una cantidad determinada, ya que mientras en las ecuaciones al multiplicarlas por una cantidad obtenemos ecuaciones equivalentes, en las funciones son diferentes. Esto se nota en la gráfica que se alarga o se comprime, mientras que sus ceros son los mismos ya que se obtuvieron al resolver ecuaciones equivalentes.

En los siguientes ejemplos se muestra una estrategia para bosquejar gráficas de funciones donde se involucra lo anterior.

Ejemplo 1. Bosquejar la gráfica de la función $f(x) = (x – 2)(x – 5)(x + 1)$.

Solución:
La función ya esta factorizada y es de tercer grado. Los puntos por donde cruza al eje X son los ceros de la función: 2, 5 y –1 y ninguno se repite, su multiplicidad es 1.
Como el signo fuera de los paréntesis es positivo la forma de su gráfica debe de ser:



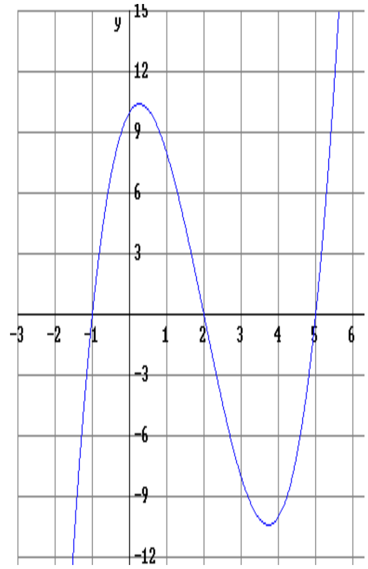
Evaluando la función en $x = 0$, se tiene la intersección con el eje Y

$$F(0) = (0 – 2)(0 – 5)(0 + 1) = 10$$

Eliminando los paréntesis se obtiene el valor del coeficiente principal, $a_3=1$

$$f(x) = x^3 – 6x^2 + 3x + 10$$

Análisis: La gráfica de esta función pasa por los puntos (2, 0), (5, 0), (–1, 0) y por (0, 10), se localizan estos puntos sobre el plano y como el coeficiente principal es positivo, la rama a la izquierda de (–1, 0) se extiende hacia abajo y la rama a la derecha de (5, 0) se extiende hacia arriba, así que sube baja y vuelve a subir como la forma anterior. La función toma valores negativos hasta llegar a –1, de –1 a 2 toma valores positivos, de 2 a 5 toma valores negativos y después de 5 toma valores positivos, ahora para tener una mejor bosquejo de la gráfica se puede evaluar la función en otros puntos los que se consideren necesarios. La gráfica de esta función (con un acercamiento) se muestra a continuación.



Los tres ceros de la función nos definen cuatro regiones o intervalos que son:

de menos infinito hasta –1 $(-\infty, -1)$
de –1 hasta 2 $(-1, 2)$
de 2 hasta 5 $(2, 5)$
de 5 hasta infinito $(5, \infty)$

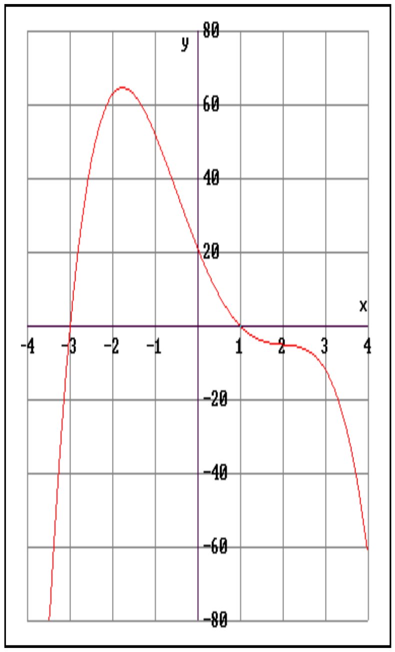
Ejemplo 2. Dibuja la gráfica de $g(x) = -(x + 3)(x - 1)(x^2 - 5x + 7)$

Solución:
La función g es de cuarto grado porque tiene dos factores lineales y uno cuadrático. Los ceros de la función son cuatro, dos los encontramos con los factores lineales y los otros dos del factor cuadrático. Así los cuatro ceros son: –3, 1 y dos complejos, ya que al resolver $x^2 - 5x + 7 = 0$ se obtiene:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$ que son raíces imaginarias.

Cruza el eje X en –3 y 1 y al eje Y lo cruza en: g(0) = – (3)(–1)(7) = 21
El valor del coeficiente principal es $a_4 = -1$

Análisis: Tanto la rama de la derecha como la de la izquierda se extienden hacia abajo. Los ceros de la función nos definen 3 regiones que son: $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ y $(1, \infty)$. La región izquierda como la derecha, la función toma valores negativos. Así que en el intervalo de [–3, 1] los valores de la función son positivos. Al evaluar la función en algunos puntos dentro de estos intervalos, resulta la gráfica siguiente.



Nota para el profesor: Se debe ir recordando a los alumnos que cuando las raíces son sencillas la curva cruza al eje X en forma directa, cuando son dobles al irse acercando a la raíz la curva se parece a una parábola ya sea hacia arriba o hacia abajo, cuando son triples al aproximarnos a la raíz la curva se comporta como una cúbica que al cruzar el eje X cambia de concavidad y así sucesivamente si aumenta la multiplicidad se comportan como las de exponente par o impar y conforme crece el exponente al cruzar o tocar al eje X se pegan más a éste.

Ejercicio 1.5.2

1) Procediendo de forma similar a los ejemplos anteriores, dar los ceros reales de cada función y bosquejar la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a) $F(x) = (x + 3)(x - 4)x$ b) $G(x) = -(x - 3)(x + 1)^2$ c) $H(x) = -(x + 2)(x + 6)(x - 1)$

d) $M(x) = 2x^3 + 9x^2 + 3x - 4$ e) $L(x) = -x^3 - 2x^2 + 10x - 25$

2) Traza un bosquejo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones y dar los ceros y su multiplicidad.

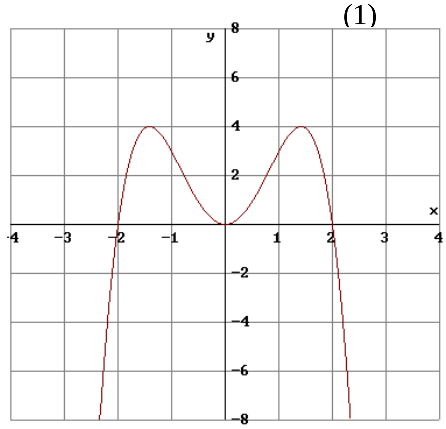
a) $f(x) = (x - 3)^2(x^2 - 1)$ b) $g(x) = -(x - 4)(x + 2)^3$ c) $h(x) = x(x + 3)(x^2 + 5x - 8)$

d) $m(x) = -(x - 2)^2(x + 1)^2$ e) $n(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 3)x^2$

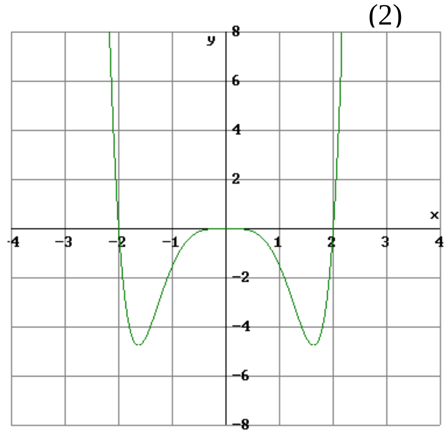
3) Relacionar cada función con su gráfica correspondiente, y explica el porqué de tu elección.

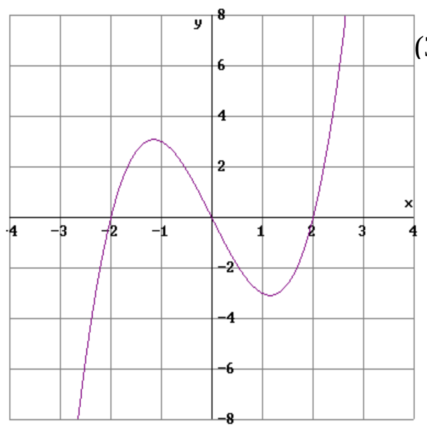
a) $P(x) = x(x^2 - 4)$ b) $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$ c) $R(x) = -x^5 + 5x^2 - 4x$
d) $S(x) = ½\,x^6 - 2x^4$

(1)

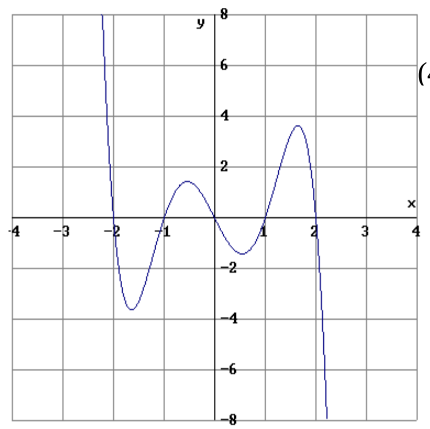


(2)



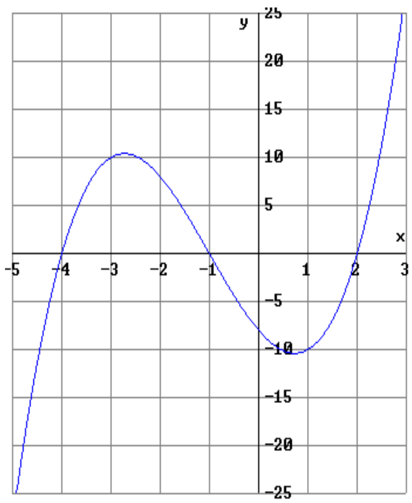


(3)



(4)

4) Dada la gráfica de la función $f(x)=(x-2)(x+4)(x+1)$, completar la siguiente tabla y trazar las gráficas de: $y = 2f(x)$ y $y = 1/2f(x)$



x	$f(x)$	$2f(x)$	$½f(x)$
-5	-28		
-4	0		
-3	10		
-2	8		
-1	0		
0	-8		
1	-10		
2	0		

a) ¿Cuándo se multiplica por 2 que observaste?______________________________

b) ¿Cuándo se multiplica por ½ que sucede? ______________________________

c) ¿Cómo son los ceros de estas tres funciones? ________________¿A que se debe esto?____

d) ¿Qué pasaría si multiplicáramos por una cantidad negativa?_________________

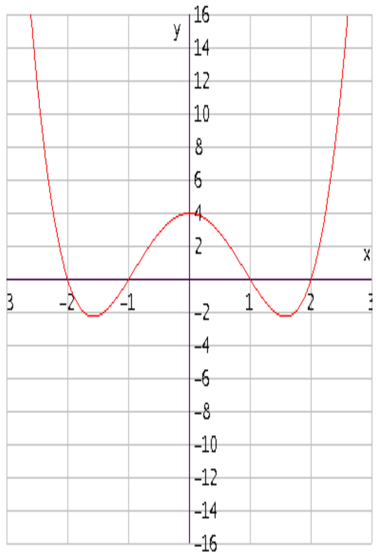
e) Si tenemos los ceros de la función, cuantas funciones se podrían determinar con esos mismos ceros ________________

f) Para que la función sea única que necesitamos aparte de sus ceros

____

5) Trazar las gráficas de las funciones dadas en los incisos, tomando como referencia la gráfica de la función dada. Trázalas en el mismo plano, y escribe su forma polinomial.

$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$



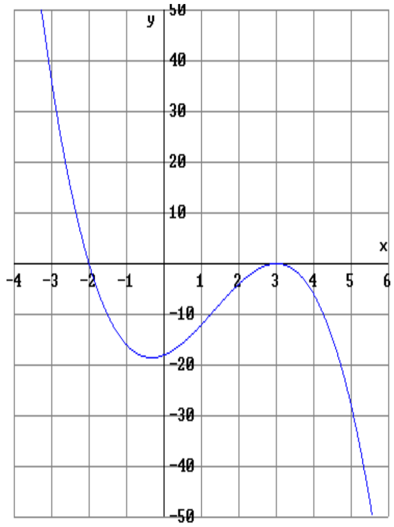
a) $y = 3f(x)$

____

b) $y = -2f(x)$

____

$G(x) = -(x-3)^2(x+2)$



c) $y = \frac{1}{3}G(x)$

____

d) $y = -2G(x)$

____

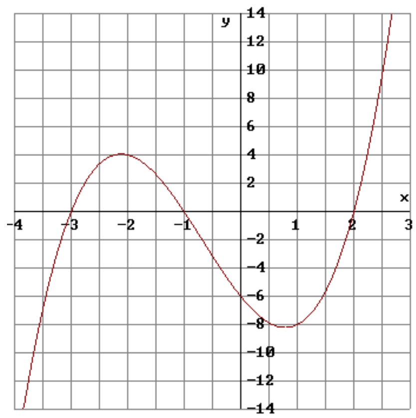
1.5.3) Traslación horizontal y vertical: $f(x + k)$, $f(x) + k$

Como la traslación horizontal y vertical se vio en la sección 1.3.4, ahora hay que hacerlo de una forma más general.
Una forma de hacer esto es:
Dada la gráfica de una función polinomial $f(x)$, se trazará la gráfica de $f(x + k)$ o de $f(x) + k$, haciendo los desplazamientos ya sea horizontales o verticales de acuerdo al valor de k dado.
Para verificar que se trazaron las gráficas correctamente, se puede evaluar dicha función en algunos puntos clave.

Sugerimos realizar algunos ejercicios como los siguientes, recordando lo aprendido en la sección 1.3.4.

Ejercicio 1.5.3

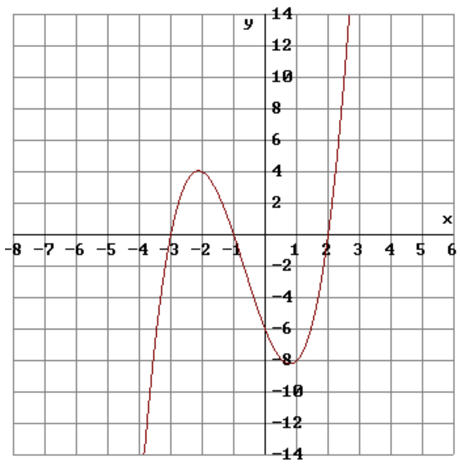
1) La siguiente gráfica es de $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$, tomándola en cuenta traza las gráficas de: a) $y = f(x) + 6$ y b) $y = f(x) - 4$, explica como lo hiciste.



i) ¿Qué le sucede a la gráfica cuando se le suma una cantidad a la función?

ii) ¿Qué le sucede a la gráfica cuando se le resta una cantidad a la función?

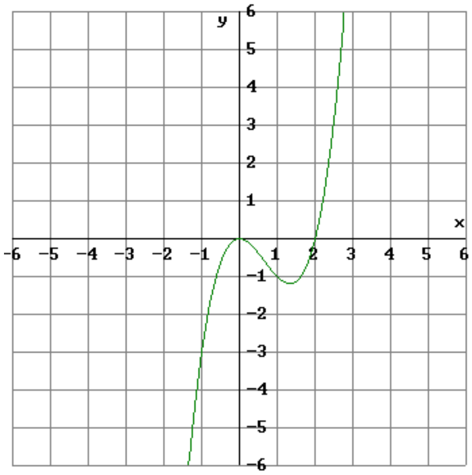
2) Tomando como base la gráfica de la función $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$ que está abajo, traza la gráfica de las funciones: a) $g(x) = f(x + 3)$ y b) $h(x) = f(x - 2)$



i) ¿Qué sucedió cuando a x le sumaste una cantidad?

ii) ¿Qué sucedió cuando a x le restaste una cantidad?

3) Dada la gráfica de F(x) = x^3 + 2x^2, trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones.



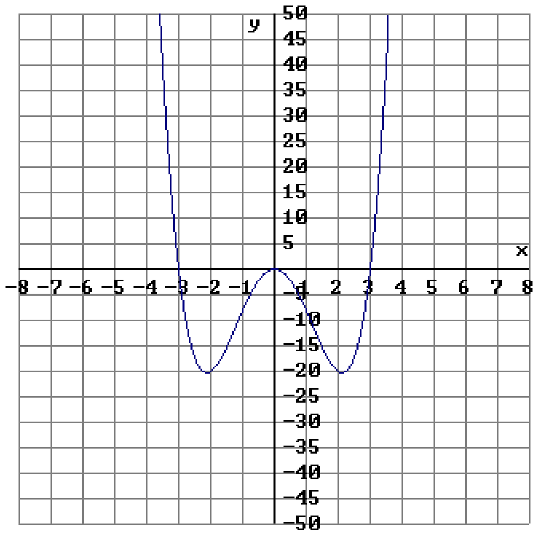
a) P(x) = F(x) + 3

b) Q(x) = F(x + 5)

c) R(x) = F(x – 3) – 2

d) S(x) = 2F(x – 2)

4) La gráfica de G(x) = x^4 – 9x^2 es la siguiente. Tomándola en cuenta traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones:



a) F(x) = –G(x) + 10

b) H(x) = 1/2G(x –3)

c) I(x) = G(x + 4) – 5

d) J(x) = – G(x – 2)

Nota para el profesor: Los siguientes puntos de alguna forma ya han sido tratados en las secciones y ejercicios anteriores. Ya que para trazar un bosquejo o delinear la gráfica de una función polinomial, se necesita saber dentro de que intervalo nos conviene analizarla para tener todos los cambios que nos interesan, y así tener una mejor aproximación de la curva que corresponde a la función. Por tal motivo, en los ejercicios de las secciones siguientes se recomienda enfatizar en los intervalos que se forman y los valores que toma en ellos la función que se analice.

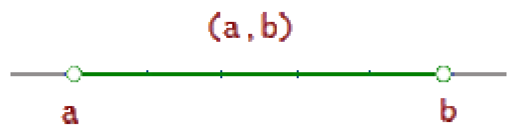
1.5.4) Noción de intervalo.

Al encontrar los ceros de la función y localizarlos sobre el eje X, estos puntos nos definen diferentes regiones que podemos distinguir definiendo sus extremos izquierdo y derecho por medio de intervalos abiertos definiéndolos ya sea de una manera formal o con palabras de tal forma que el alumno vaya integrando a su lenguaje estos términos.

Se llama **intervalo** al c**onjunto de números reales** comprendidos entre otros dos dados: **a y b** que se llaman **extremos del intervalo**.

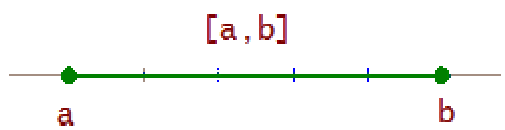
Intervalo **abierto** (**a**, **b**), es el conjunto de todos los números reales mayores que **a** y menores que **b**. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$

Su representación geométrica es:



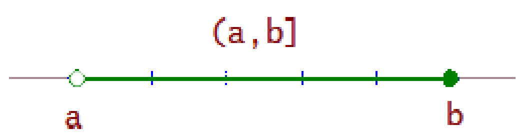
Intervalo **cerrado** [**a**, **b**], es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que **a** y menores o iguales que **b**. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$

Su representación geométrica es:



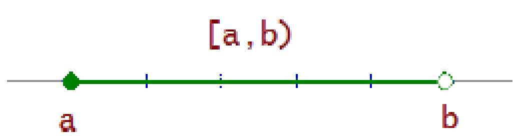
Intervalo **semiabierto** por la izquierda, (**a**, **b**], es el conjunto de todos los números reales mayores que **a** y menores o iguales que **b**. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$

Su representación geométrica es:



Intervalo **semiabierto** por la derecha, [**a**, **b**), es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que **a** y menores que **b**. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$

Su representación geométrica es:



Cuando queremos nombrar un conjunto de puntos formado por dos o más de estos intervalos, se utiliza el signo $\cup$(**unión**) entre ellos.

PARA DAR UN MEJOR REPASO AL CONCEPTO DE INTERVALO VER LOS VIDEOS EN LAS SIGUIENTES DIRECCIONES:
http://matematicasies.com/?Introduccion-a-los-Intervalos-de
http://matematicasies.com/?06-Formas-de-expresar-un-intervalo
http://matematicasies.com/?Ejercicio-de-Intervalos

1.5.5) Intervalos donde $f(x)$ es positiva o $f(x)$ es negativa.

Teniendo los ceros de la función así como las demás características que se pueden obtener de la expresión de la función, también podemos saber en cada uno de los intervalos determinados si el valor de la función es positivo o negativo y comprobarlo evaluando en algún valor de x dentro del intervalo y esto da mayor seguridad sobre todo a los alumnos de que la curva delineada corresponde a la función

1.5.6) La no-interrupción de la gráfica.

Hay que hacer notar que la gráfica de una función polinomial del grado que sea siempre se puede graficar tanto para valores pequeños o grandes, negativos o positivos (en todos los números reales), la curva nunca salta de un valor a otro de manera brusca sino que hay continuidad en ella.
Para poder bosquejar estas gráficas siempre necesitamos encontrar un intervalo de x en donde se tengan todos los cambios que sufre la gráfica antes de llegar al comportamiento de los extremos, así que, es muy importante localizar el valor de x en donde empieza la rama izquierda y el valor de x donde empieza la rama derecha para poder conocer los valores que toma la función dentro de estos dos puntos y así fijar una escala adecuada en ambos ejes coordenados. Para poder tener un bosquejo lo más aproximado a la gráfica de una función polinomial dada, la escala en ambos ejes coordenados es un factor muy importante ya que de esta depende la visualización de su comportamiento.
Cuando se tiene una función polinomial como resultado del análisis de un problema en particular, lo primero que se tiene que analizar son las condiciones de éste, para poder ver cuales son los valores que se le pueden asignar a las variables que intervienen.
Ya que si estos valores tienen saltos (son discretos), entonces la gráfica de la función estará delineada por una serie de puntos en el intervalo adecuado.
Si los valores asignados a las variables son todos los que podamos encontrar sobre un intervalo de acuerdo a las condiciones del problema, entonces la gráfica se delinea por una curva solamente en el intervalo adecuado al problema, se interrumpe en los extremos.

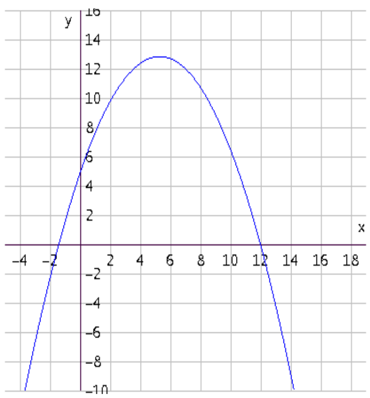
COMO UN RESUMEN DE LO QUE SE HA APRENDIDO HASTA AQUÍ SOBRE FUNCIONES SE PUEDE VER EN EL VIDEO QUE ESTÁ EN LA SIGUIENTE DIRECCIÓN:
http://www.youtube.com/watch?v=f2qmNdC4NUU&feature=related

Ejercicio 1.5.6
1) Representar geométricamente los siguientes intervalos:

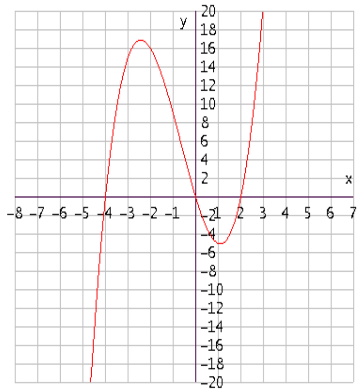
a) (3 , 8) b) [–2 , 6] c) [2 , ∞) d) (–∞ , 3] e) [$\frac{3}{2}$, 9]

2) Escribir en notación de intervalo las siguientes expresiones:
a) $-5 \le x < 3$ b) $1 < x \le 7$ c) $3 < x < 12$ d) $-7 \le x \le 0$ e) $2 \ge x > -\infty$

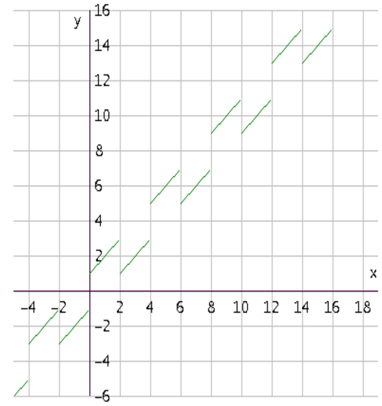
3) Para cada gráfica decir los intervalos donde la función es positiva o es negativa, también si es o no continua.



a)



b)



c)

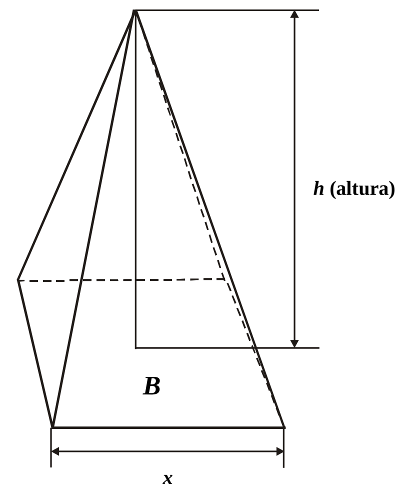
1.6 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Aprendizajes:
Resolver problemas de aplicación.

En el transcurso de esta unidad se han analizado varios problemas de aplicación, ejemplificaremos otros más y se propondrán ejercicios para que el alumno los resuelva.

Ejemplo 1. Se diseñan equipos para hacer velas, cada equipo contiene 25 pulgadas cúbicas de cera y un molde para hacer velas de forma de pirámide. La altura de la vela es de 2 pulgadas menor que la longitud de cada lado de la base cuadrada de la vela. ¿Cuáles son las dimensiones del molde de la vela?

Solución:
Como la base de la pirámide de la vela es cuadrada, entonces se tiene que la forma de la vela es una pirámide regular. Recordemos que una pirámide regular es la que tiene por base un polígono regular y por caras laterales triángulos isósceles iguales, es decir, aquella cuya altura une el vértice con el centro de la base como se ve en la siguiente figura.



Pirámide regular (base cuadrada)

El volumen de la pirámide se calcula por:

$V = \frac{1}{3} B \cdot h$, donde "$B$" es el área de la base y "h" la altura de la pirámide.

La longitud de cada lado de la base es de "x" pulgadas, entonces su área es $B = x^2$ por ser la base un cuadrado, y la altura es $h = (x-2)$ pulgadas.

Por lo tanto, el volumen de la pirámide es: $V = \frac{1}{3}(x^2)(x-2)$ sustituyendo $V = 25$, se tiene:

$$25 = \frac{1}{3} x^2 (x-2)$$
$$25 = \frac{1}{3}(x^3 - 2x^2)$$
$$3[\,25 = \frac{1}{3}(x^3 - 2x^2)]$$
$$75 = x^3 - 2x^2$$

$$\boxed{x^3 - 2x^2 - 75 = 0}$$

Las soluciones posibles para "x" son: $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 15,\ \pm 25,\ \pm 75$

Considerando solo las posibles soluciones positivas y usando el Teorema del Factor para probar las posibles soluciones de "x", encontramos que $P(5) = (5)^3 - 2(5)^2 - 75 = 0$
Empleando la división sintética, se tiene:

5	1	–2	0	–75
		5	15	75
	1	3	15	0

Este resultado nos dice que $x-5$ es un factor, entonces la función polinomial se puede escribir como: $P(x) = (x-5)(x^2 + 3x + 15)$

Las soluciones para $x^2+3x+15=0$ son complejas conjugadas, las cuales se descartan como soluciones del problema.
Por lo tanto, se concluye que la base del molde de la vela debe ser un cuadrado de 5 pulgadas de lado y la altura $h=5-2=3$ pulgadas.

Ejemplo 2. La posición de una partícula al cabo de t segundos es $P(t) = 2t^3 - 11t^2 + 13t - 1$, y su posición al cabo de 1 segundo es 3. ¿En qué otros instantes la posición es igual a 3?

Solución:
Lo que se pide es en que otros instantes la posición es igual a 3 o sea $P(t) = 3$, igualando la función a 3 tenemos:

$$3 = 2t^3 - 11t^2 + 13t - 1$$

esta es una ecuación de tercer grado que podemos escribir como:

$$2t^3 - 11t^2 + 13t - 4 = 0$$

Se nos dice en el problema que al cabo de 1 segundo la posición es igual a 3, esto quiere decir que t=1 es una raíz y lo podemos comprobar por medio de la división sintética.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -11 & 13 & -4 \\ & & 2 & -9 & 4 \\ \hline & 2 & -9 & 4 & 0 \end{array}$$

Residuo igual a cero, es decir, $t_1 = 1$ es una raíz y $(t - 1)$ es un factor. Entonces

$$2t^3 - 11t^2 + 13t - 4 = (t - 1)(2t^2 - 9t + 4)$$

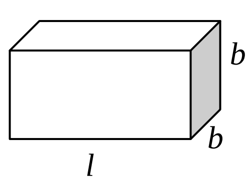
Hacemos $2t^2 - 9t + 4 = 0$ y resolviendo, encontramos las raíces que nos faltan:

$$t_2 = \frac{-(-9)+\sqrt{(-9)^2-4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{9+\sqrt{49}}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$t_3 = \frac{-(-9)-\sqrt{(-9)^2-4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{9-\sqrt{49}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Los otros instantes donde la posición es igual a 3 son cuando $t = \frac{1}{2}$ segundo y cuando $t = 4$ segundos.

Ejemplo 3. Una caja con base cuadrada tiene una longitud que sumada al perímetro de su base da 108 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la caja si su volumen es de 2 200 pulgadas^3?



Solución
La longitud l más el perímetro de su base $4b$ dan 108 pulgadas:

$$l + 4b = 108$$

Como se nos pide la longitud de la caja necesitamos una expresión en términos de l, así que despejamos a b.

$$4b = 108 - l, \qquad b = \frac{108 - l}{4}$$

El Volumen de una caja es: V = (Área de la base)(longitud) = $b^2(l)$

Sustituimos el valor de b y el volumen $2200 = \left(\frac{108-l}{4}\right)^2 l$ multiplicamos por 16 y desarrollamos el binomio al cuadrado $35200 = (11664 - 216l + l^2)l$

$$35200 = 11664l - 216l^2 + l^3$$

igualamos a cero y tenemos una ecuación cubica en l

$$l^3 - 216l^2 + 11664l - 35200 = 0$$

Usando la división sintética con algunos múltiplos de 35200:

1	1	-216	11664	-35200
		1	-215	11449
	1	-215	11449	-23751

2	1	-216	11664	-35200
		2	-428	22472
	1	-214	11236	-12728

4	1	-216	11664	-35200
		4	-848	43264
	1	-212	10816	8064

Cambió de signo, entonces entre 2 y 4 hay una raíz

8	1	-216	11664	-35200
		8	-1664	80000
	1	-208	10000	44800

20	1	-216	11664	-35200
		20	3920	154880
	1	-196	7744	119680

40	1	-216	11664	-35200
		40	-7040	184960
	1	-176	4624	149760

80	1	-216	11664	-35200
		80	10880	62720
	1	-136	784	27520

El residuo va disminuyendo.

88	1	-216	11664	-35200
		88	-11264	35200
	1	-128	400	0

Por fin, 88 es una raíz.

$l = 88$ pulgadas es una raíz, las otras dos las encontramos al resolver la ecuación de segundo grado $l^2 - 128l + 400 = 0$, usando la fórmula general:

$$l = \frac{128 \pm \sqrt{(-128)^2 - 4(1)(400)}}{2} = \frac{128 \pm \sqrt{14784}}{2} = \frac{128 \pm 121.589}{2}$$

$l_1 = 124.795$ pulgadas

$l_2 = 3.205$ pulgadas, esta es la raíz que esta entre 2 y 4

- l no puede valer 124.795 pulgadas ya que la suma del perímetro de la base y la longitud deben de ser 108 pulgadas;
- con l = 88 pulgadas, el valor de b = (108 – 88)/4 = 5 pulgadas por lo que el volumen de la caja es: V = 5^2(88) =2200 pulgadas^3;
- por último con l = 3.205 pulgadas, el valor de b=(108 – 3.205)/4 = 26.199 pulgadas y V=$(26.199)^2$(3.205) = 2199.87 $\approx$ 2200 pulgadas^3.

Se tienen dos cajas que cumplen con las condiciones del problema.

Si en lugar de despejar a b en términos de l despejásemos a l en términos de b, expresar el volumen como función de b hace que sea más sencillo encontrar los valores de b y de l.

Ejemplo 4. Se observa que la población de conejos en una pequeña isla está dada por la función $P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1000$

Donde t es el tiempo (en meses) desde que se iniciaron las observaciones.

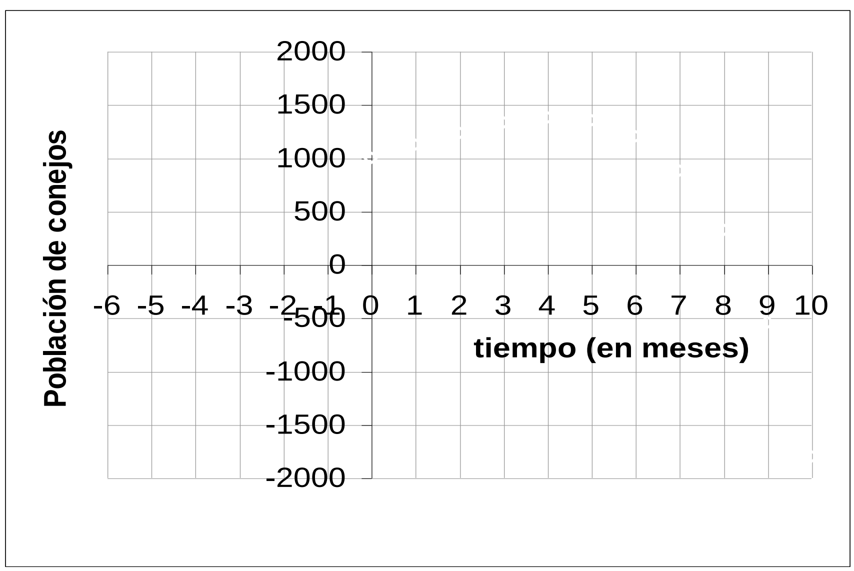
a) ¿Cuándo se alcanza la máxima población, y cuál es ésta?

b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?

Solución:

La población de conejos esta dada por la función P que es de cuarto grado y el coeficiente de t^4 es negativo, así que si trazamos la gráfica esta abre hacia abajo. Es decir, tanto su extremo derecho como izquierdo se extienden hacia abajo. La parte que nos interesa es desde t = 0 hasta el momento en que desaparece la población, esto es cuando la función P es igual a cero. Dándole valores positivos a t tenemos la siguiente tabla, localiza los puntos en el plano dado y traza su gráfica

t	P(t)
0	1000
1	1119.6
2	1233.6
3	1327.6
4	1377.6
5	1350
6	1201.6
7	879.6
8	321.6
9	-544.4
10	-1800



Observando tanto la tabla como la gráfica y realizando los cálculos necesarios contesta las siguientes preguntas

a) ¿Cuándo se alcanza la máxima población y cuál es ésta?

b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos en la isla? (aproxima el punto donde la gráfica de la función dada cruza al eje x).

Ejercicio 1.6

1) Suponer que cierto día, t horas después de la media noche, la temperatura está dada por T(t) = $\left(\frac{-t}{16}\right)(t-6)(t-18)+55$ en °F.

Si t está entre 6 y 18, ¿en que tiempo (racional) la temperatura T es de 75 °F?

2) Si en un parque se encuentran 34 osos y se sabe que al cabo de x años el número de osos en el parque esta dado por el polinomio

$$N(x) = -x^3 + 7x^2 + 60x + 34$$

¿Cuántos años deberán transcurrir para que haya 450 osos? Determina solo la solución racional.

3) La velocidad v del aire que se mueve por la tráquea de una persona durante un resfriado es $v(r) = 486(1 - r)(r^2)$ siendo r el radio de la tráquea. ¿Para qué valor de r la velocidad es de 72?

4) Una caja sin tapa se hace de una pieza metálica de 12cm por 15 cm, cortándole (a la pieza metálica) un cuadrado de área x^2 en cada esquina y doblando luego los lados.
   a) Expresa el volumen V de la caja como una función de x
   b) Encuentra los valores de x que hacen que el volumen de la caja sea de 176 cm^3.
   c) ¿Cuál de estos valores hacen que la caja tenga un área superficial mínima?

5) Un cohete está formado de un cilindro recto circular de 20 m de altura coronado por un cono cuya altura y diámetro son iguales y cuyo radio es el mismo que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser este radio si el volumen total debe ser $512\frac{\pi}{3}$ m^3?

6) En una fábrica de helados se vierte helado líquido en los barquillos, para luego ponerlas a refrigerar. Se desea determinar el volumen de helado que hay en un barquillo a medida que se va llenando.
Se puede verificar que el volumen $\boldsymbol{V}$ de helado líquido que hay en un barquillo cuando se ha llenado hasta la altura h, es: $\boldsymbol{V}(h) = \frac{\pi \cdot r^2}{3H^2}h^3$ donde r es el radio de la tapa del barquillo y H su altura. Si un barquillo de altura 15 cm y el radio de su tapa es de 5 cm, contiene 135π cm^3 de helado, determina la altura del helado contenido en el barquillo.

AUTOEVALUACIÓN

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para probar esta unidad y si has logrado los objetivos propuestos al principio de ésta. Para hacer esta evaluación, y los resultados que obtengas sean verdaderamente lo que aprendiste, es necesario que la resuelvas sin consultar el texto durante la solución, pero sí te recomendamos que tengas tu formulario que puedes consultar. Esperamos que esta autoevaluación la termines en 2 horas como máximo.

1) De las siguientes reglas de correspondencia elige aquellas que **NO** representen a una función, y explica porqué no lo son:

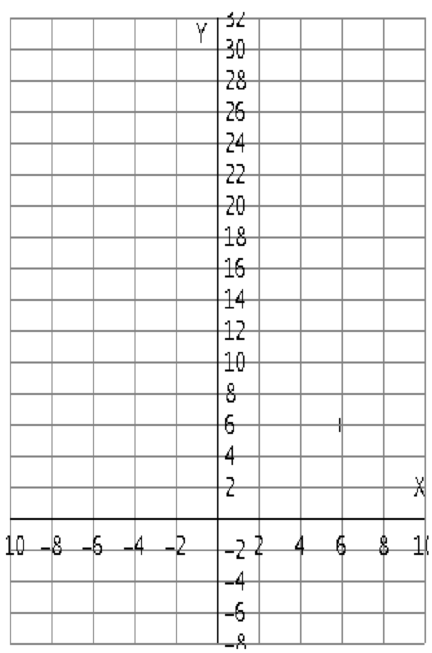
A) $x - y^2 = 5$ B) $2xy - 6 = 3x$ C) $2x^2 + 5y^2 = 10$ D) $2x^2 - y = 3$ E) $2 - y = 9$

2) Si la regla de correspondencia de una función es $f(x) = x - 3x^3 + 5x^2$, encuentra f(3), f(–1) y f(½).

3) Encuentra las raíces de la función anterior.

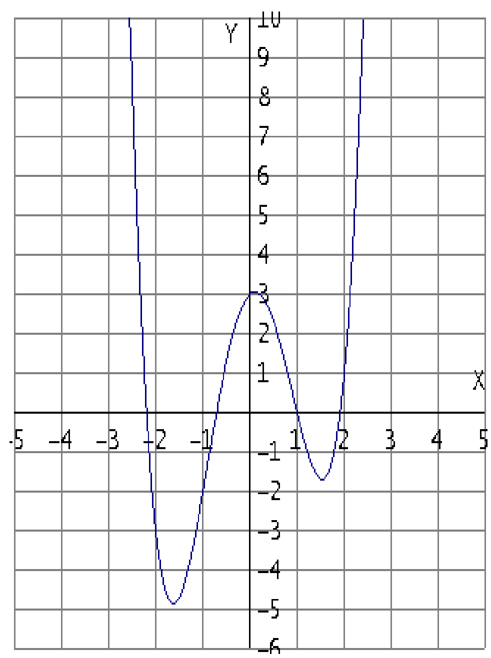
4) Trazar su gráfica.

5) Si las raíces de una función polinomial son 0, –3, –1, 1 y 2, escribe su ecuación más sencilla, en forma factorizada y en la desarrollada. También trazar su gráfica en el siguiente plano:



ESCALA:

6) Si la gráfica de $y = x^4 - 5x^2 + x + 3$ está abajo, encuentra dos de sus raíces, una de ellas aproximándola a 3 decimales.



Para considerar si has aprendido el principal propósito de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente las preguntas 1, 2, 3 y 4 pero no has logrado todos los objetivos, SÓLO LOS BÁSICOS. Si resuelves también la 5 entonces vas avanzando muy bien, pero si también resuelves la 6, ¡FELICIDADES!, lograste todos los objetivos de la unidad y estas listo para continuar con la siguiente. Si resuelves menos de 4 preguntas, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad y hacer todos los ejercicios propuestos.

MEMORAMA DE FUNCIONES POLINOMIALES

Proponemos este juego para reafirmar los conceptos vistos en esta unidad.

- Las reglas del juego son las mismas que las de un memorama normal, se puede trabajar con equipos de hasta 4 alumnos.
- El profesor decide los beneficios para los ganadores de cada equipo.
- Para utilizar este juego se fotocopian las imágenes del memorama en papel de preferencia grueso, se pueden enmicar, para finalmente recortarlas y tener un juego de cartas que se le proporciona a cada equipo.